Научная статья
УДК 519.217.2
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-113-151

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА, УПРАВЛЯЕМЫЕ МАКСИМАЛЬНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Валентин Алексеевич Топчий

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения РАН,
Омск, Россия

topchij@gmail.com, topchij@ofim.oscsbras.ru;
https://orcid.org/0000-0003-4310-5665

Аннотация

Пусть $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ последовательность вырождающихся цепей Маркова с $n+1\in\mathbb{N}$ состоянием при фиксированном n. Вероятности перехода определяются с помощью циклов случайных процессов, являющихся двухшаговыми экстремальными эволюциями популяции частиц, которым присвоены n–мерные бинарные типы x с нормой Хэмминга |x|. Значение цепи Маркова $Z_n(s)=n-|\mathrm{x}|$ задается нормой типа x некоторой частицы. Пусть на входе в цикл имеется частица типа x, а на выходе получается частица типа y. Вероятность последнего события является вероятностью перехода из состояния $Z_n(s)=n-|\mathrm{x}|$ в состояние $Z_n(s+1)=n-|\mathrm{y}|$. На основании предельных теорем описаны асимптотические свойства случайных величин $Z_n(s)-Z_n(s+1)\geq 0$ при $n\to\infty$ и оценено среднее время вырождения цепи. Результаты применимы для исследования эволюционные алгоритмы оптимизации.

Ключевые слова и фразы

цепи Маркова, схема серий, экстремальные задачи, неравномерные оценки в центральной предельной теореме, распределение Пуассона, эволюционные алгоритмы.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2026-0033.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 113-151
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 113-151

Для цитирования

Топчий В. А. Последовательности вырождающихся цепей Маркова, управляемые дважды максимальными случайными процессами // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 2, С. 113-151. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-113-151

Sequences of degenerate Markov chains controlled by twice maximal random processes

Valentin A. Topchii

Omsk Branch of the S. L. Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Omsk, Russia

topchij@gmail.com, topchij@ofim.oscsbras.ru;
https://orcid.org/0000-0003-4310-5665

Abstract

Let $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ be a sequence of degenerate Markov chains with $n+1 \in \mathbb{N}$ states for a fixed n. The transition probabilities are defined using cycles of random processes that are two-step extreme evolutions of a population of particles assigned n–dimensional binary types x with the Hamming norm $|\mathrm{x}|$. The value of the Markov chain $Z_n(s) = n-|\mathrm{x}|$ is given by the norm of the type x of a certain particle. Let there be a particle of type x at the input to the cycle, and at the output a particle of type y. The probability of the latter event is the probability of transition from the state $Z_n(s) = n - |\mathrm{x}|$ to the state $Z_n(s+1) = n-|\mathrm{y}|$. Based on limit theorems, the asymptotic properties of random variables $Z_n(s) - Z_n(s+1) \geq 0$ are described as $n \to \infty$ and the average time of chain degeneration is estimated. The results are applicable for the study of evolutionary algorithms of optimization.

Keywords

Markov chains, series scheme, extremal problems, non-uniform estimates in the central limit theorem, Poisson distribution, evolutionary algorithms.

Funding

The work was carried out as part of the state assignment of the IM SB RAS, project FWNF-2026-0033.

For citation

Topchii V. A. Sequences of degenerate Markov chains controlled by twice maximal random processes // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 2, P. 113-151. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-113-151

§ 1. Введение, основные определения

С 70-ых годов XX века в теории вероятностей особый интерес проявляется к случайным процессам у которых переход из состояния в состояние связан с распределением максимума некоторых случайных величин. В частности, Ламперти [1] положил начало исследованию максимальных ветвящихся процессов, в которых все частицы порождают потомство, но при переходе на следующий уровень остаются только потомки частицы с максимальным их количеством. Далее появляется более общий набор моделей (добавляется многомерность, случайная среда). Общее представление по данной тематике можно найти в обзорах [2] и [3]. В исследуемой модели идеология отбора элемента с максимальной характеристикой используется дважды для определения следующего значения цепи Маркова на каждом шаге.

Приведенная далее постановка задачи мотивирована исследованиями эволюционных алгоритмов оптимизации. В работе [4] получены оценки для минимального числа взвешиваний при поиске имеющих другой вес фальшивых монет среди n данных. Задача подобна нахождению компонент фиксированного бинарного вектора с помощью подбора минимального количества $\mathcal{K}(n)$ тестовых векторов на основе сравнения их по норме Хэмминга. Авторы получили следующие нижние и верхние асимптотические оценки для детерминированных процедур

$$2n(1+o(1))/\log_2 n \le \mathcal{K}(n) \le (1+\delta)n(1+o(1))\log_2 9/\log_2 n, \tag{1}$$

где $\delta > 0$ произвольно и $n \to \infty$. Это демонстрирует наличие алгоритмов, более быстрых, чем отдельное взвешивание каждой из монет или проверка с помощью бинарных векторов каждой из n позиций искомого вектора. Здесь и далее запись типа $f(x) \ge g(x)(1+o(1))$ при x, сходящимся к некоторому пределу, используется в случае, если существует функция $\epsilon(x) = o(1)$ такая, что $f(x) \ge g(x)(1+\epsilon(x))$, но явный вид $\epsilon(x)$ для нас не актуален.

Мы исследуем аналогичную проблему поиска компонент неизвестного фиксированного бинарного вектора, называемого далее типом частицы, с помощью некоторого семейства стохастических алгоритмов. Эти алгоритмы задают распределение вырождающихся цепей Маркова $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ со значениями, равными расстоянию Хэмминга между вектором, определяющим значение $Z_n(s)$, и искомым вектором. В данной работе бинарные векторы интерпретируются как типы эволюционирующей совокупности частиц. Как легко извлечь из приведенного далее описания модели, распределения всех приращений $Z_n(s+1) - Z_n(s)$ инвариантны относительно выбора искомого вектора. Не ограничивая общности, можно считать искомый вектор равным $(1,1,\dots,1)$. Другими словами, частица типа $(1,1,\dots,1)$ определяет равное 0 поглощающее состояние цепи Маркова. Исследуемые характеристики, как и взаимосвязи с генетическими алгоритмами, опишем позже. Основной трудностью является переход от стохастического алгоритма к оценкам переходных вероятностей для определяемых ими цепей Маркова.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{N}_n := \{k : k \in \mathbb{N},\ k \le n\}$, $\mathbb{N}_{0,n} := \{k : k \in \mathbb{N}_0,\ k \le n\}$ при $n > 0$. Рассмотрим последовательность (схему серий) вырождающихся цепей Маркова $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0} = \{Z_{n,\mu(n),\lambda(n)}(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$, $Z_n(s) \in \mathbb{N}_{0,n}$, при $n, \mu(n), \lambda(n) \in \mathbb{N}$ и $n, \lambda = \lambda(n) \to \infty$. Вводя новые обозначения в формулах применяем символ $:=$, где двоеточие стоит со стороны определяемого выражения. Символы $i, j, k, l, m, n, \lambda, \mu$ с индексами или аргументами и без них, математическими значками под или над ними по умолчанию используются для подмножеств $\mathbb{N}_0$. Кроме этого, эти значения могут быть функциями от n, но этот аргумент мы будем традиционно опускать.

Последовательность цепей Маркова определяется с помощью случайных процессов, являющихся двухшаговыми эволюциями популяции частиц с типами из $\mathbb{S}_n := \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\} = \{0,1\}^n$ на которых задана норма Хэмминга $|\mathrm{x}| := \sum_{i=1}^n x_i$. При наличии у x индексов они переносятся на компоненты.

Значение цепи Маркова $Z_n(s)$ определяется нормой типа x случайно выбранной частицы соотношением $Z_n(s) = n - |\mathrm{x}|$. Опишем алгоритм выбора этих частиц. В нем определена случайная процедура выбора типа начальной частицы x_0, определяющей $Z_n(0)$. Далее по индукции, если известен тип частицы x, определяющей $Z_n(s)$, то приводится алгоритм случайного выбора типа частицы, определяющей $Z_n(s+1)$. Фактически мы задаем алгоритм вычисления вероятностей перехода для $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$.

Эволюция частиц, определяющих цепь Маркова $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$.

• Типом начальной частицы $\mathrm{x}(0)$ является один из $\mu = \mu(n) \in \mathbb{N}$ независимо и равновозможно выбранных типов из $\mathbb{S}_n$, обозначаемых $\mathrm{x}_0^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}_\mu$, с максимальной нормой, т. е.

$$\mathrm{x}(0) := \left\{\mathrm{x}_0^{(i_0)} : \left|\mathrm{x}_0^{(i_0)}\right| = \max\nolimits_{1\le i\le\mu(n)} \left|\mathrm{x}_0^{(i)}\right|\right\}, \tag{2}$$

где i_0 берется произвольно, если их несколько.

$\odot$ Обозначим через $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$, где $\lambda = \lambda(n)$, цикл превращений типов частиц с двухэтапным вычислением максимума норм, начинающийся с частицы типа x и завершающийся переходом к частице типа $\tilde{\mathrm{x}}$.

Все циклы превращений независимы друг от друга. Если $|\mathrm{x}| = n$, то переходы в другие состояния при выполнении цикла $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$ не возможны.

$\odot$ Каждый эволюционный цикл $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$ независимо от остальных циклов начинается с фиксации значения случайной величины $\ell{\in}\mathcal{B}(n,\lambda/n)$, которое сохраняется до завершения данного цикла и обозначается l. Циклы при условии $\ell = l$ обозначаются через $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$. Эволюционный цикл $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$ состоит из двух этапов. Далее выражение "на цикле" означает условную вероятность при выбранном семействе параметров.

• На первом этапе (*этап мутации*) частица типа x мутирует в частицы типов $\mathrm{x}^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}_\lambda$. Мутация состоит в равновозможном выборе l компонент из типа x и замене компонент "0" на "1" и наоборот. Эти процедуры независимы по i. Завершается первый этап цикла выбором типа x' по формуле

$$\mathrm{x}' := \left\{\mathrm{x}^{(i_0)} : |\mathrm{x}^{(i_0)}| = \max\nolimits_{1\le i\le\lambda} |\mathrm{x}^{(i)}|\right\},$$

где i_0 берется произвольно, если их несколько.

• Второй этап (*этап скрещивания*) начинается с пары частиц с типами x и x', которые скрещиваются с параметром λ и порождают частицы типов $\mathrm{y}^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}_\lambda$. Скрещивание состоит в независимой случайной замене с вероятностью λ^{-1} каждой из компонент типа x на соответствующую компоненту типа x'. Эти процедуры независимы по i. Реально процедура применяется только для l различающихся компонент этих типов. Итогом второго этапа цикла является выбор типа y по формуле

$$\mathrm{y} = \left\{\mathrm{y}^{(i_0)} : |\mathrm{y}^{(i_0)}| = \max\nolimits_{1\le i\le\lambda} |\mathrm{y}^{(i)}|\right\},$$

где i_0 берется произвольно, если их несколько.

• Завершается цикл $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$ выбором типа финальной частицы $\tilde{\mathrm{x}}$, который будет исходным типом x, если $|\mathrm{x}| > |\mathrm{y}|$, и $\tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{y}$ в случае $|\mathrm{x}| \le |\mathrm{y}|$.

Перейдем к описанию цепи Маркова $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$.

Ее начальное значение определяется соотношением $Z_n(0) := n - |\mathrm{x}_0|$. Состояние 0 является поглощающим для цепи.

Если значение $Z_n(s) = n - |\mathrm{x}|$ определено типом частицы x, то значение $Z_n(s{+}1) = n - |\tilde{\mathrm{x}}|$ определяется типом финальной частицы $\tilde{\mathrm{x}}$, полученной в результате цикла $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$, примененного к частице типа x. Переходные вероятности от $Z_n(s)$ к $Z_n(s+1)$ определяются алгоритмом $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$.

Очевидно, что переходные вероятности цепи Маркова не зависят от явного вида типа x, а зависят только от его нормы. Последовательные значения цепи не возрастают.

Данное семейство цепей Маркова $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ будем называть *определяемыми дважды максимальными случайными процессами* или ДМСП цепями Маркова.

Наша цель — описать асимптотические свойства убывания значения цепи из состояния $Z_n(s) = k$ за один шаг и среднее время (число шагов) до попадания цепи в поглощающее состояние. Мы проведем двухэтапное исследование распределения максимумов независимых на каждом этапе случайных величин. Это позволит минимизировать по параметру $\lambda = \lambda(n)$ асимптотику среднего времени для момента вырождения цепи Маркова или нахождения искомого вектора в исходной постановке задачи.

Напомним определения используемых распределений случайных величин и введем обозначения для них.

Запись $\xi \in \mathcal{B}(n,p)$, где $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$, означает, что случайная величина ξ имеет *биномиальное распределение* с вероятностями

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =: P_p(n;k), \;\; k \in \mathbb{N}_{0,n},$$

где $q = 1-p$. Хорошо известно, что $\mathbf{E}[\xi] = np$ и $\mathrm{Var}[\xi] = npq$.

Запись $\xi \in \mathcal{HG}(n,n_1,r)$, где $n, r \in \mathbb{N}$, $r, n_1 \in \mathbb{N}_{n-1}$, означает, что случайная величина ξ имеет *гипергеометрическое распределение* с вероятностями

$$\mathbf{P}(\xi = r_1) = \binom{n_1}{r_1}\binom{n-n_1}{r-r_1}\Big/\binom{n}{r} =: P_{n,n_1}(r;r_1), \;\; r_1 \in \mathbb{N}_{0,r}.$$

где $\binom{u}{v} = 0$ при $v \notin \mathbb{N}_{0,u}$. Хорошо известно, что при $p = n_1/n$ и $q = 1-p$ верны соотношения $\mathbf{E}[\xi] = rp$, $\mathrm{Var}[\xi] = rpq(n-r)(n-1)^{-1}$.

Запись $\xi \in \mathcal{P}(a)$, где $a \in \mathbb{R}^+$, означает, что случайная величина ξ имеет *распределение Пуассона* с вероятностями

$$\mathbf{P}(\xi = k) = e^{-a}a^k/k! =: \Pi_a(k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Положим $\Pi_a(A) := \mathbf{P}(\eta \in A)$, $A \subseteq \mathbb{N}_0$, $\Pi_{a,s} := \mathbf{P}(\eta < s)$, $\overline{\Pi}_{a,s} := \mathbf{P}(\eta \geq s)$. Хорошо известно, что $\mathbf{E}[\xi] = a$, $\mathrm{Var}[\xi] = a$.

Запись $\xi \in \mathcal{N}(a,\sigma^2)$, где $a = \mathbf{E}[\xi] \in \mathbb{R}$ (среднее) и $\sigma^2 = \mathrm{Var}[\xi]$ (дисперсия), $\sigma \in \mathbb{R}^+$, означает, что случайная величина ξ имеет *нормальное распределение*. Случайная величина ξ имеет *стандартное нормальное распределение*, если $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$. Для стандартного нормального распределения плотность и функция распределения имеют вид

$$\varphi(x) := (2\pi)^{-1}e^{-0.5x^2}, \quad \Phi(x) := \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Запись $\xi \in \mathcal{G}_I$ означает, что случайная величина ξ имеет *распределение Гумбеля* (с параметрами 0 и 1). Ее функция распределения имеют вид

$$G(x) := \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а среднее и среднеквадратическое отклонение равны

$$\mathbf{E}[\xi] = \gamma \approx 0.5772, \;\; \sqrt{\mathrm{Var}[\xi]} = \pi/\sqrt{6} \approx 1.2825,$$

где γ — постоянная Эйлера — Маскерони.

Здесь и далее символ $\approx$ означает приближенное равенство или округление. Этот символ будем использовать и для функций при отбрасывании выражений бесконечно малого порядка относительно наименьшего слагаемого. Условие $g(x) \sim f(x)$, при x сходящихся к некоторому пределу означает $g(x) = f(x)(1 + o(1))$. Условия $g(x) = o(f(x))$, или (что то же самое) $f(x)/g(x) \to \infty$, при x, сходящихся к некоторому пределу, иногда будем записывать в виде $g(x) \ll f(x)$, или $f(x) \gg g(x)$, с теми же условиями на x.

Исследуемые цепи Маркова описываются в терминах биномиальных векторов и биномиальных или гипергеометрических распределений с двухэтапным вычислением максимума некоторых случайных величин на каждом шаге. Для последовательностей этих случайных величин существует богатая асимптотическая теория. Мы займемся ее применением. Значения процесса $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ на каждом шаге не возрастают, и все состояния, кроме поглощающего $Z_n(s) = 0$, соответствующего вектору (далее частице типа) $\mathrm{x} = (1, 1, \dots, 1)$, несущественные.

Данная модель цепей Маркова применима в теории эволюционных алгоритмов дискретной оптимизации. Она близка к $(1 + (\lambda, \lambda))$ GA с *onemax* функцией приспособленности, равной норме типа частицы. В генетических алгоритмах контролируется $\mathbb{T}_n$ – количество вычислений функции приспособленности до попадания цепи Маркова в поглощающее состояние $\mathrm{x} = (1, \dots, 1)$, что соответствует максимуму функции приспособленности. В нашем случае количество вычислений функции приспособленности – это количество частиц популяции, возникающих в алгоритме, определяющем переходы в цепи Маркова, или количество вычислений их нормы. При общей постановке задачи о нахождении компонент неизвестного фиксированного бинарного вектора, а не эквивалентной задачи о числе шагов до попадания в $(1, \dots, 1)$, функция приспособленности является расстоянием Хэмминга между типами искомой и выбираемых в алгоритме частиц. В генетических алгоритмах при общем подходе функция приспособленности не обязана быть нормой Хэмминга, а может быть сложной вычислительной процедурой. Подробнее применение наших результатов к $(1 + (\lambda, \lambda))$ GA опишем в разделе 3.4.

§ 2. Асимптотика распределения $Z_n(0)$

Свойства переходных вероятностей для цепей Маркова $\{Z_{n,\mu(n),\lambda(n)}(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0} = \{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$, $n, \mu(n), \lambda(n) \in \mathbb{N}$, описываются в терминах типов эволюционирующей системы частиц. Формально значение $Z_n(s)$ определяется типом частицы $\mathrm{x}(s) \in \mathbb{S}_n$ с множеством индексов, которые мы опускаем.

Более того, и аргумент (s) по возможности тоже будем опускать. Начнем с доказательства вспомогательных утверждений, а затем на их основе приведем доказательство теоремы.

Случайный выбор типа частицы x(0), определяющий значение $Z_n(0) = n-|\mathrm{x}(0)|$, можно интерпретировать как независимые мутации каждой компоненты типа $\mathrm{x}_\mathbf{0}$:=$(0,\ldots,0)$ с вероятностью 0.5, что повторяются независимо друг от друга $\mu = \mu(n)$ раз. В результате порождаются частицы типов $\mathrm{x}_0^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}_\mu$, а тип x(0) определяется соотношением (2).

Введем обозначения

$$a_m := \sqrt{2\ln m}, \quad b_m := \sqrt{2\ln m} - \ln\sqrt{4\pi\ln m}/\sqrt{2\ln m}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если $\mu = \mu(n) \to \infty$ и $\mu = O(n\ln^2 n)$, то для всех фиксированных $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\mathbf{P}\big(|\mathrm{x}(0)| \le 0.5n + 0.5\sqrt{n}\big(b_\mu + a_\mu^{-1}x\big)\big) \to \exp\{-e^{-x}\}, \tag{4}$$

или

$$\mathbf{P}\big(Z_n(0) < 0.5n - 0.5\sqrt{n}\big(b_\mu + a_\mu^{-1}x\big)\big) \to 1 - \exp\{-e^{-x}\}. \tag{5}$$

В случае $\mu = o(\sqrt{n})$ утверждение теоремы очевидно в силу центральной предельной теоремы и утверждений из следующего подраздела (см. комментарий после завершения доказательства теоремы 3).

В условиях теоремы 1 по определению $|\mathrm{x}_0^{(i)}| \in \mathcal{B}(n, 0.5)$. Мы рассмотрим более общую модель процессов для определения переходных вероятностей цепи Маркова. Первый этап цикла, начинается с частицы типа x, имеющей норму k, с фиксированным $\ell = l$ – числом мутирующих в типе компонент. Количество мутирующих в $\mathrm{x}^{(i)}$ позиций с заменой “0” на “1” имеет гипергеометрическое распределение $\mathcal{HG}(n,k,l)$, которое аппроксимируется биномиальным $\mathcal{B}(l, k/n)$. Следовательно, в следующем подразделе мы изучим распределение максимума независимых случайных величин с биномиальным распределением $\mathcal{B}(\check{n}, p)$. Затем в приложениях для начального распределения $Z_n(0)$ положим $\check{n} = n$ и $p = 0.5$, а для приращений цепи Маркова будет выбраться нужный частный случай значений $\check{n}$ и p.

2.1 Доказательство теоремы 1

Методы описания распределения нормированного максимума сумм независимых одинаково распределенных слагаемых разработаны в теории вероятностей довольно подробно (см. гл. 1 из [5]).

Приведем утверждение канонической теоремы 1.5.3 из [5] для распределения максимума нормально распределенных случайных величин.

Теорема 2. *Пусть* $\xi_i \in \mathcal{N}(0.1)$, $i \in \mathbb{N}$, *— последовательность независимых случайных величин,* $m \in \mathbb{N}$, $M_m = \max\limits_{1\le i\le m} \xi_i$, $u_m(x) := b_m + xa_m^{-1}$, *где последовательности* a_m *и* b_m *определены соотношениями (3), Тогда при всех* $x \in \mathbb{R}$ *и* $m \to \infty$ *верно асимптотическое представление*

$$\mathbf{P}(M_m \le u_m(x)){=}\mathbf{P}(a_m(M_m - b_m) \le x){=}\Phi^m(u_m(x)) \to \exp\{-e^{-x}\}. \qquad (6)$$

Приведем следствие из теоремы 2. Последовательность случайных величин называется *асимптотически нормальной*, если после нормировки ее средним (вычитается) и среднеквадратическим отклонением (разность делится на него) она сходится по распределению к нормально распределенной случайной величине.

Лемма 1. *Положим, что последовательность случайных величин* ω_n, $n \in \mathbb{N}$, *асимптотически нормальна и* $W_n(z) = \mathbf{P}(\omega_n < z)$ *– их функции распределения,* $\mathbf{E}[\omega_n] = 0$, $\mathrm{Var}[\omega_n] = 1$ *и для некоторой последовательности функций* $\phi(n, z)$, $z \in \mathbb{R}$, *выполняется неравенство*

$$|W_n(z) - \Phi(z)| < \phi(n, z),\ \ z \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $\omega_n^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, *независимые стохастические копии* ω_n *и* $\Omega_{n,m} := \max_{1\le i\le m} \omega_n^{(i)}$, $m = m(n) \in \mathbb{N}$.

Если для последовательности $u_m(x)$, *определенной в теореме 2, выполнены условия*

$$m\phi(n, u_m(x)) = m(n)\phi(n, u_{m(n)}(x)) \to 0,\ \text{при}\ \ n \to \infty, \qquad (7)$$

то при $n \to \infty$ *верно представление*

$$\mathbf{P}(\Omega_{m,n} \le u_m(x)) = \mathbf{P}(a_m(\Omega_{m,n} - b_m) \le x) \to \exp\{-e^{-x}\}.$$

Доказательство. Учитывая свойства распределения максимума независимых случайных величин и представление (6), запишем соотношения

$$\mathbf{P}(M_m \le u_m(x)) = \Phi^m(u_m(x)) \to \exp\{-e^{-x}\},\ u_m(x) = b_m + xa_m^{-1},$$
$$\mathbf{P}(a_m(\Omega_{m,n} - b_m) \le x) = W_n^m(u_m(x)).$$

Утверждение леммы 1 следует из известного неравенства для разности степеней двух функций с нормами, не превосходящими 1,

$$\left|W_n^m(u_m(x)) - \Phi^m(u_m(x))\right| \le m|W_n(u_m(x)) - \Phi(u_m(x))|$$

и оценки (7). □

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 113-151
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 113-151

Далее теорема 2 и лемма 1 применяются в *схеме серий* (см. разд. 5.4.2 в [6] или гл. 4, § 1 в [7]). Это означает, что в последовательности случайных величин $\xi_{j,n}$, $j, n \in \mathbb{N}$, $j \le n$, компоненты независимы по j при любом фиксированном n, и, вообще говоря, могут быть различно распределенными. Никаких ограничений на зависимость случайных величин при различных n нет. В нашем случае свойства последовательностей будут анализироваться независимо при различных n и, более того, мы будем описывать зависящую от n область изменения параметров, при которых оценки содержательны.

Введем обозначения $S_n := \sum_{j=1}^n \xi_{j,n}$, $A_{j,n} := \mathbf{E}[\xi_{j,n}]$, $B_{j,n}^2 := \mathrm{Var}[\xi_{j,n}]$, $\mathbf{M}_{j,n} := \mathbf{E}\big[(\xi_{j,n} - A_{j,n})^3\big]$, $\mathbf{M}_{j,n}^+ := \mathbf{E}\big[|\xi_{j,n} - A_{j,n}|^3\big]$ и $A_n := \sum_{j=1}^n A_{j,n}$, $B_n^2 := \sum_{j=1}^n B_{j,n}^2$, $\mathbf{M}_n := \sum_{j=1}^n M_{j,n}$, $\mathbf{M}_n^+ := \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_{j,n}^+$.

Общую предельную теорему о точности равномерной аппроксимации $(S_n - A_n)/B_n$ стандартным нормальным распределением можно найти в теореме 8.5.2 из [6]. Для независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_{j,n}$ ее можно уточнить.

Теорема 3. Теорема 8.5.3 из [6] *Пусть* $S_n := \sum_{j=1}^n \xi_{j,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *где случайные величины* $\xi_{j,n}$, $j \in \mathbb{N}_n$, *независимы и одинаково распределены,* $a_n := \mathbf{E}[\xi_{j,n}]$, $\sigma_n^2 := \mathrm{Var}[\xi_{j,n}]$, $\mathbf{M}_{1,n}^+ < \infty$ *и* $\omega_n = (S_n - na_n)(\sigma_n\sqrt{n})^{-1}$, *тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbf{P}(\omega_n < z) - \Phi(z)| \le c\mathbf{M}_{1,n}^+ \sigma_n^{-3} n^{-1/2}, \tag{8}$$

где $(2\pi)^{-1/2} < c < 0.4774$ *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Мы привели модифицированную формулировку теоремы 8.5.3 в более простых обозначениях с включением следующего за ней замечания. Дело в том, что фигурирующее в первоисточнике условие о независимости распределений $\xi_{j,n}$ от n фиктивно, так как неравенство доказывается при любом фиксированном n и любом фиксированном для данного семейства распределения. Оценка $c < 0.4774$ получена в работе [8]. $\square$

Неравенство (7) позволяет определить допустимую область изменения параметра m. В последних обозначениях в теореме 1 исследуются случайные величины $S_n \in \mathcal{B}(n, 0, 5)$ с $\sigma_n = 1/2$ и $\mathbf{M}_{1,n}^+ = 1/8$. Согласно лемме 1 и теореме 3 асимптотическое представление (4) верно в случае $m = o\big(\sqrt{n}\big)$.

Этот результат нельзя существенно усилить, основываясь на равномерных по всей прямой оценках точности аппроксимации нормированного биномиального распределения $\mathcal{B}(n, 0, 5)$ нормальным распределением.

Перейдем к описанию неравномерных оценок точности аппроксимации биномиальных распределений нормальным. С учетом потребностей исследований свойств циклов мы опишем точность аппроксимации не только для распределения $\mathcal{B}(n,0,5)$, но и для $S_{\check{n}} \in \mathcal{B}(\check{n},p)$ с $\check{n}=\check{n}(n)$, $p=p(n)\in(0,\underline{p})$, где $0<\underline{p}<1$, $q=q(n)=1-p$. Мы сначала будем считать $\check{n}=n$, а в приложениях внесем нужные коррективы. В этом случае $\sigma^2=\sigma_n^2=pq$ и $\mathbf{M}_{1,n}^{+}=pq(1-2pq)$, условие асимптотической нормальности (8) верно, если $\mathbf{M}_{1,n}^{+}\sigma_n^{-3}n^{-1/2}\to 0$ при $n\to\infty$, а для использования леммы 1 нужно выполнение условия

$$(1-2pq)/\sqrt{\check{n}pq}=O(1)/\sqrt{\check{n}p}\to 0,\ \text{при } p\to 0,$$

что всегда верно для фиксированного p, но в общем случае эта сходимость верна только при $\check{n}^{-1}=o(p)$.

Для более точного описания распределения максимума независимых одинаково распределенных случайных величин нам не нужна оценка точности приближения к нормальному распределению при малых значениях аргумента. Согласно теореме 2 и лемме 1, это приближение нужно оценить в точках $u_m(x)=b_m+xa_m^{-1}\to\infty$.

Опишем свойства распределения максимума, соответствующего выбору начального значения и фазы мутации (при $\check{n}=n$, а позже перейдем к нужным $\check{n}=\check{n}(n)$) с помощью частного случая теоремы 6 из гл. VI, § 3 в [7] для $\mathcal{B}(n,p(n))$ (дискретных) распределений при конечных четвертых моментах. В биномиальном распределении все слагаемые равны 0 или 1 и все их моменты ограничены 1. Эта теорема позволяет оценить точность приближения в зависимости от аргумента функции распределения.

Для $S_n=\sum_{j=1}^n \xi_{j,n}\in\mathcal{B}(n,p)$, $p=p(n)$, с независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\xi_{j,n}$, $j\in\mathbb{N}_n$, обозначим нормализованные средним случайные величины через $X_{j,n}(p)$ такие, что $\mathbf{P}(X_{j,n}(p)=-p)=q$, $\mathbf{P}(X_{j,n}(p)=1-p)=p$ и

$$F_n(p;z):=\mathbf{P}\left((pqn)^{-1/2}\sum\nolimits_{j=1}^{n}X_{j,n}(p)<z\right)=\mathbf{P}((S_n-np)/\sqrt{npq}<z). \quad (9)$$

Очевидно, что $\sigma^2=\mathbf{E}[X_{j,n}^2(p)]=pq$, $\mathbf{E}[X_{j,n}^k(p)]=\mathbf{M}_{j,n}^{(k)}=\mathbf{M}_{1,n}^{(k)}=pq(q^{k-1}+(-1)^k p^{k-1})$.

Теорема 6 из гл. VI, § 3 в [7] в случае $\mathbf{E}|X_j|^r<\infty$ дает точность аппроксимации распределений нормированных сумм случайных величин X_i при их любом фиксированном распределении с использованием функции $U_r(z)=\Phi(z)+\sum_{\nu=1}^{r-2}Q_\nu(z)n^{-\nu/2}$, где функции $Q_\nu(z)$ определяются громоздкими выражениями (1.13) из гл. VI, § 1 в [7]. Мы будем использовать эквивалентное определение (4.10) из теоремы 3 из гл. XVI, § 4 в [9]

$$U_r(z)=\Phi(z)+\sum\nolimits_{\nu=1}^{r-2}Q_\nu(z)n^{-\nu/2}=\Phi(z)+\varphi(z)\sum\nolimits_{\nu=1}^{r-2}R_{\nu+2}(z)n^{-\nu/2}, \quad (10)$$

где (см. (4.11) из гл. XVI, § 4 в [9])

$$\varphi(z)P_\nu(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\varphi(z)R_\nu(z), \tag{11}$$

а в случае $\nu = 3, 4$ приведем определения (2.13) из гл. XVI, § 2 в [9]

$$P_3(z) := \frac{\mathbf{M}_{1,n}}{6\sigma^3}H_3(z), \quad P_4(z) := \frac{\mathbf{M}_{1,n}^2}{72\sigma^6}H_3(z) + \frac{\mathbf{M}_{1,n}^{(4)} - 3\sigma^4}{24\sigma^4}H_4(z),$$

где $H_3(z) = z^3 - 3z$ и $H_4(z) = z^4 - 6z^2 + 3$ – полиномы Эрмита, определенные в соотношениях (1.7) из гл. XVI, § 1 в [9].

Рассмотрим периодическую функцию $S(z) = [z] - z + 0,5$ с периодом 1. Она представима в виде следующего ряда Фурье (см. доказательство теоремы 1 из гл. 8, § 43 в [10])

$$S(z) = \sum\nolimits_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi l z)}{\pi l} = S_1(z)$$

Определим два семейства аналогичных функций

$$S_{2k}(z) := 2\sum\nolimits_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi l z)}{(2\pi l)^{2k}}, \quad S_{2k+1}(z) := 2\sum\nolimits_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi l z)}{(2\pi l)^{2k+1}}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 6 из гл. VI, § 3 в [7] верна для дискретных случайных величин с конечными моментами не менее 3-го порядка, Мы будем использовать ее в случае конечности четвертых моментов.

Теорема 4. *Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины X_j с положительной вероятностью принимают только значения вида $a + mh$, $m \in \mathbb{Z}$, где h — шаг решетки распределения. Если $\mathbf{E}[X_j] = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}[X_j^2]$ и $\mathbf{E}|X_j|^r < \infty$ для некоторого $r \geq 3$, $F_n(z) = \mathbf{P}\big((n\sigma)^{-0.5}\sum_{j=1}^n X_j < z\big)$, то существует положительная функция $\varepsilon(z) > 0$, такая что $\lim\limits_{z\to+\infty} \varepsilon(z) = 0$ и*

$$\begin{gathered}\left|F_n(z) \mp \Phi(z) - U_r(z) - \sum\nolimits_{\nu=1}^{r-2} \delta_\nu \frac{h^v S_\nu(z\sigma\sqrt{n}/h - an/h)}{(\sigma\sqrt{n}/h)^v} \frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}z^\nu}U_r(z)\right| \\ =: \left|F_n(z) - \Phi(z) - I_0(z) - \sum\nolimits_{\nu=1}^{r-2} I_\nu(z)\right| \leq \frac{\varepsilon(\sqrt{n}(1+|z|))}{\sqrt{n^{r-2}}(1+|z|)^r},\end{gathered} \tag{12}$$

где $\delta_\nu = 1$ при $\nu = 4m+1,\ 4m+2$ и $\delta_\nu = -1$ в остальных случаях.

Мы используем теорему 4 для $S_n \in \mathcal{B}(n,p)$ при $r = 4$. Поэтому мы привели явное определение только для $U_4(z)$, а в других случаях можно воспользоваться громоздкими соотношениями из [7].

Как отмечалось ранее в комментариях к доказательству теоремы 3, в некоторых случаях оценки в теореме 4 делаются при выбранном n с произвольными $\mathbf{E}\big[|X_1^k|\big] < \infty$, $k \le r$, в выражениях, которые могут зависеть от n, но не зависят от оценок при других n. Довольно простой анализ исследований, проведенных в гл. VI, § 3 из [7], показывает, что для случайных значений X_1, принимающих конечное число равномерно ограниченных значений, все оценки при различных n независимы. Точнее, в теореме 1 из гл. VI, § 3 в [7] $\int_{\mathbb{R}} |z|^k \, \mathrm{d}V(z) = \int_{[-1,1]} |z|^k \, \mathrm{d}V(z)$ и срезка на высоком уровне совпадает с исходным интегралом, а погрешность отсутствует, т.е. в правой части оценки (3.1) первый интеграл исчезает, а второй не зависит от области интегрирования. Наличие зависящих от n срезок случайных величин на высоком уровне означает возможность взаимосвязи случайных величин для разных n и может препятствовать вложению модели в схему серий. У нас этой взаимосвязи нет, и оценки (12) для биномиальных распределений в теореме 4 можно использовать в схеме серий. Приведем частный случай теоремы 4 для нашей модели в терминах схемы серий.

Следствие 1. *Пусть $F_n(p; z)$ определено соотношением (9), случайные величина $S_n \in \mathcal{B}(n,p)$, $p = p(n)$, $z = z(n) \to \infty$ и $qpn \to \infty$ при $n \to \infty$, тогда из оценки (12) при $h = 1$ и $r = 4$ следует представление*

$$|F_n(p; z) - \Phi(z)| = \varphi(z)\left(\frac{|q-p| O(z^2) + O(1)}{\sqrt{npq}} + \frac{O(z^3)}{npq}\right) + \frac{o(1)}{nz^4}. \tag{13}$$

Доказательство. Для биномиального распределения в соотношении (12) $h = 1$, а члены $Q_\nu(z)$ из $U_r(z)$ являются многочленами степени $\nu + 2$, умноженными на $\varphi(z)$. Производной от $\Phi(z)$ является $\varphi(z)$, а $\varphi'(z) = -z\varphi(z)$. Модули семейств $S_\nu(z)$ ограничены абсолютной константой, не зависящей от распределения слагаемых.

Соотношения (10) и (11) с учетом явного вида моментов приводят к представлению

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} U_4(z) = \varphi(z)\Bigg(1 + \frac{q-p}{6\sqrt{npq}}(z^3 - 3z) \qquad\qquad (14)\\ + \; n^{-1}\left(\frac{(q-p)^2}{72pq}(z^3 - 3z) + \frac{q^3 + p^3 - 3pq}{24pq}(z^4 - 6z^2 + 3)\right)\Bigg).\end{aligned}$$

Определение $I_1(z)$, приведенные выше свойства его компонент и представление (14) позволяют получить оценку

$$I_1(z) = O(1)\frac{\varphi(z)}{\sqrt{npq}}\left(1 + \frac{q-p}{\sqrt{npq}} z^3 + \frac{z^4}{npq}\right). \tag{15}$$

Из представления (14) следует соотношение

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}U_4(z) = -\varphi(z)z\biggl(1 + \frac{q-p}{6\sqrt{npq}}(z^3 + O(z^2)) + \frac{q^3+p^3-3pq}{24npq}(z^4 + O(z^3))\biggr)$$

и аналог оценки (15)

$$I_2(z) = O(1)\frac{\varphi(z)z}{npq}\biggl(1 + \frac{q-p}{\sqrt{npq}}z^3 + \frac{z^4}{npq}\biggr). \tag{16}$$

Учитывая определение (11), мы получаем оценку

$$I_0(z) = \varphi(z)\biggl(\frac{q-p}{6\sqrt{npq}}(z^2 + O(z)) + \frac{q^3+p^3-3pq}{24npq}(z^3 + O(z^2))\biggr),$$

что можно записать в виде

$$I_0(z) = \frac{\varphi(z)}{6\sqrt{npq}}\biggl((q-p)z^2 + O(1)\frac{z^3}{\sqrt{npq}}\biggr). \tag{17}$$

Представление (12) и оценки (17), (15) и (16) влекут асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} |F_n(p;z) - \Phi(z)| &= \varphi(z)\biggl(\frac{|q-p|O(z^2) + O(1)}{6\sqrt{npq}} \\ &+ \frac{O(z^3)}{npq} + \frac{O(z^4)}{(npq)^{3/2}} + \frac{O(z^5)}{(npq)^2}\biggr) + \frac{o(1)}{nz^4}. \end{aligned} \tag{18}$$

Из представления (18) следует оценка (13) из утверждения следствия 1. □

Завершение доказательства теоремы 1. Для вывода утверждения теоремы нужно проверить выполнение условия (7) из леммы 1, что при замене m на μ и $w_n = 2(S_n - 0.5n)/\sqrt{n}$, где $S_n \in \mathcal{B}(n, 0.5)$ приведет к соотношению (4).

Используя определение $u_m(x)$, вычислим $u_m^2(x)$

$$\begin{aligned} u_m^2(x) &= b_m^2 + 2b_m x a_m^{-1} + x^2 a_m^{-2} = 2\ln m - 2\ln\sqrt{4\pi\ln m} \\ &+ \frac{\ln^2\sqrt{4\pi\ln m}}{2\ln m} + 2x - x\frac{\ln\sqrt{4\pi\ln m}}{2\ln m} + \frac{x^2}{2\ln m}. \end{aligned}$$

Это позволяет получить оценку

$$\begin{aligned} \varphi(u_m(x)) &= \frac{e^{-u^2(x)/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\exp\{-\ln m + \ln\sqrt{4\pi\ln m} - x\}(1+o(1))}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{\sqrt{4\pi\ln m}}{m\sqrt{2\pi}}e^{-x}(1+o(1)) = \frac{\sqrt{2\ln m}(1+o(1))}{m}e^{-x}. \end{aligned} \tag{19}$$

Полагая в следствии 1 $p = q = 1/2$ и заменяя в (13) переменную z на $u_m(x)$, а также учитывая оценку (19) и то, что $u_m(x) = \sqrt{2\ln m}(1 + o(1))$, при $m = m(n) = O(n \ln^2 m)$ и $n \to \infty$, получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} m\phi(n, u_m(x)) &= O(1)m\varphi(u_m(x))(n^{-0.5} + u^3(x)n^{-1}) + o(1)mn^{-1}u_m^{-4}(x) \\ &= O(1)(n^{-1}\ln^2 m + n^{-0.5}\ln^{0.5} m)e^{-x} + o(1)mn^{-1}\ln^{-2} m = o(1). \end{aligned}$$

Очевидно, что при $m = m(n) = O(n \ln^2 n)$ условие $m = O(n \ln^2 m)$ выполняется. Поэтому по лемме 1 из последних оценок при замене m на μ следует утверждение теоремы 1. □

По аналогии с только что приведенным завершением доказательства теоремы 1 получим необходимое далее утверждение. Мы заменим n на $\check{n}(n)$, точнее на l – значение случайной величины $\ell \in \mathcal{B}(n, \lambda/n)$, где $\lambda = \lambda(n)$ – последовательность из определения нашей цепи Маркова. В дальнейшем для оценки вероятностей принципиальными будут значения $l \in [\lambda - C\sqrt{\lambda}, \lambda + C\sqrt{\lambda}]$, где C достаточно большое, но в доказательствах мы не используем явный вид этих вероятностей, указываем существенно завышенные границы для l в зависимости от n и λ.

Введем обозначения: $S_\ell^* = S_\ell^*(n, \lambda) \in \mathcal{B}(\ell, p)$, $S_l = S_\ell^*\big|_{\ell=l} \in \mathcal{B}(l, p)$, $S_l^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, — независимые стохастические копии S_l, $\mathcal{S}_{l,\lambda} := \max_{1 \le i \le \lambda} S_l^{(i)}$.

Напомним, что с учетом соотношений (3) справедливы представления

$$u_\lambda(x) = \sqrt{2\ln\lambda} - \ln\sqrt{4\pi\ln\lambda}/\sqrt{2\ln\lambda} + x/\sqrt{2\ln\lambda} = \sqrt{2\ln\lambda}(1 + o(1)). \quad (20)$$

Приведем определение (9) в терминах исследуемых биномиальных распределений

$$F_l(p; z) := \mathbf{P}\left((pql)^{-1/2}(S_l - lp) < z\right).$$

Лемма 2. *Пусть $S_l \in \mathcal{B}(l, p)$, $\lambda = \lambda(n)$, $p = p(n) \in (0, \underline{p}]$, где $0 < \underline{p} < 1$, $lp, \lambda p \to \infty$ при $n \to \infty$ и выполнены условия*

$$l > c\lambda \ln^{-2}\lambda, \ \ln^3\lambda = o(lp), \quad (21)$$

где $c > 0$ произвольное фиксированное, тогда для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$ и $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\mathbf{P}\left((pql)^{-1/2}(\mathcal{S}_{l,\lambda} - lp) < u_\lambda(x)\right) = F_l^\lambda(p; u_\lambda(x)) = \exp\{-e^{-x}\} + o(1). \quad (22)$$

Доказательство. В условиях данной леммы утверждение (13) следствия 1 при $lpq \to \infty$ принимает вид

$$|F_l(p; z) - \Phi(z)| = \varphi(z)\left(\frac{|q-p|O(z^2) + O(1)}{\sqrt{lpq}} + \frac{O(z^3)}{lpq}\right) + \frac{o(1)}{lz^4}, \quad (23)$$

а соотношение (19) превращается в

$$\varphi(u_\lambda(x)) = \sqrt{2\ln\lambda}\lambda^{-1}e^{-x}(1+o(1)).$$

По аналогии с завершающим этапом доказательства теоремы 1 в соотношении (23) переменную x следует заменить на $u_\lambda(x)$ и применить лемму 1, т.е. проверить выполнение условия (7), принимающего вид

$$\lambda\varphi(u_\lambda(x))\frac{O(u_\lambda^2(x))}{\sqrt{lpq}} + \frac{o(1)\lambda}{lu_\lambda^4(x)} = \frac{\sqrt{2\ln^3\lambda}(1+o(1))}{\sqrt{lpq}}e^{-x} + \frac{o(1)\lambda}{l\ln^2\lambda} \to 0, \quad (24)$$

при $n\to\infty$, где мы воспользовались грубой оценкой (20).

Легко проверить, что из условий (23) следует сходимость к нулю в оценке (24), что завершает доказательство соотношения (22). $\square$

§ 3. Анализ вероятностей перехода цепи Маркова на отдельном цикле

Введем обозначения для совершения промежуточных вычислений вероятностей перехода в цепи Маркова $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ на циклах $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$ и $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$.

На этапе мутации в цикле $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$ частица типа x превращается в частицу типа x$'$, которая имеет максимальную норму среди λ полученных мутантов. Обозначим $\Delta'_{k,l} = \Delta'(n,k,l) := |\mathrm{x}'| - k$ – приращение нормы Хэмминга на цикле $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$ после завершения фазы мутации и $\Delta^*_{k,l} = \Delta^*(n,k,l) := |\mathrm{y}| - k$ – приращение нормы Хэмминга на этом цикле после завершения фаз мутации и скрещивания.

В цикле $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$ без фиксации значения ℓ приращение нормы Хэмминга после завершения фаз мутации и скрещивания обозначим $\Delta^*_k = \Delta^*(n,k,\ell) := |\mathrm{y}| - k$. Случайную величину Δ^*_k представим в виде

$$\Delta^*_k = \sum\nolimits_l \Delta^*_{k,l}\mathbb{I}_{\{\ell=l\}},$$

где $\mathbb{I}_{\{A\}}$ — индикатор события A, т.е. равен 1 при наступлении события A, а иначе — 0.

Если частица типа x определяет состояние цепи Маркова $Z_n(s) = k$, то для начинающегося с нее цикла $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$ обозначим $p_{n,l}(k) := p_{n,l}(\lambda,k) = \mathbf{P}(\Delta^*_{k,l} > 0) = \mathbf{P}_l\big(Z_n(s) - Z_n(s+1) > 0\big|Z_n(s) = k\big)$ – вероятность в конце данного цикла получить частицу типа y такую, что $|\mathrm{y}| > k$. При переходе к циклу $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$ без фиксации значения ℓ аналогичная вероятность

$p_n(k) := p_n(\lambda, k) = \mathbf{P}(\Delta_k^* > 0) = \mathbf{P}\big(Z_n(s) - Z_n(s+1) > 0 \big| Z_n(s) = k\big)$ по формуле полной вероятности имеет вид

$$p_n(k) = \sum\nolimits_l p_{n,l}(k)\mathbf{P}(\ell = l).$$

Обозначим через $\tau_n(k)$ число шагов цепи Маркова $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ до ближайшего перехода к меньшему значению при случайном выборе ℓ, а через τ_n число шагов этой цепи Маркова до попадания в поглощающее состояние $Z_n(\tau_n) = 0$, т.е. момента τ_n когда впервые цепь попадает в состояние 0. При $p_n(k) := \mathbf{P}\big(\tau_n(k) = 1\big)$ случайная величина $\tau_n(k)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p_n(k)$. Поэтому

$$\mathbf{E}[\tau_n(k)] = p_n^{-1}(k), \tag{25}$$

Если после первого этапа цикла $\mathcal{A}_{n,l}(k, \ell, \lambda)$ для $\Delta'(n, k, l)$ при выполнении некоторых условий существует предельное распределение, то на втором этапе возникает распределение максимума пуассоновских случайных величин с параметром, близким к 1. Но предельными распределениями для нормированного максимума случайных величин распределений Пуассона могут быть только вырожденные, равные 0 или 1 на положительной полуоси (см. пример 1.7.14 из [5]). Поэтому по итогам второй фазы цикла может быть получены только оценки для хвостов распределений максимума. Мы опишем свойства хвостов локальных характеристик $\mathcal{T}_{n,l}(k) := \max\big\{0, \Delta_{k,l}^*\big\} = Z_n(s) - Z_n(s+1)$ на цикле $\mathcal{A}_{n,l}(k, \ell, \lambda)$. Аналогичную характеристику на цикле $\mathcal{A}_n(k, \ell, \lambda)$ без фиксации значения ℓ обозначим $\mathcal{T}_n(k) := \max\big\{0, \Delta_k^*\big\} = Z_n(s) - Z_n(s+1)$. Отметим, что события $\mathcal{T}_n(k) > 0$, $\Delta_k^* > 0$ и $\tau_n(k) = 1$ совпадают.

Как и ранее, при переходе к случайному ℓ получаем соотношение

$$\mathcal{T}_n(k) = \sum\nolimits_l \mathcal{T}_{n,l}(k)\mathbb{I}_{\{\ell=l\}}. \tag{26}$$

Обозначим через $\mathcal{L}(\ell; k)$ число битовых позиций на ℓ мутировавших у частицы типа x с состояниями “0” при переходе в x′, а через $\mathcal{L}_l(\ell; k)$ значение этой случайной величины при условии $\ell = l$. Очевидно, что

$$\mathcal{L}_l(\ell; k) = 0.5(l + \Delta'(n, k, l)).$$

Как и ранее, верно представление

$$\mathcal{L}(\ell; k) = \sum_l \mathcal{L}_l(\ell; k)\mathbb{I}_{\{\ell=l\}} = 0.5\lambda + 0.5\sum_l \Delta'(n, k, l)\mathbb{I}_{\{\ell=l\}}.$$

Теорема 5. *Пусть в циклах* $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$, $l,n,k,\lambda \in \mathbb{N}$, $p = p(n) = k/n \in (0,\underline{p}]$, *где* $0 < \underline{p} < 1$, $\lambda = \lambda(n) \to \infty$ *и* $p \gg \lambda^{-1}\ln^3\lambda$ *при* $n \to \infty$, $l = l(n) \in \mathfrak{D}(\lambda) := \left[\lambda - \lambda^{\gamma}, \lambda + \lambda^{\gamma}\right]$, *где* $0.5 < \gamma < 1$ *– любое фиксированное,* $\mathfrak{D}_p(\lambda) := \left[\lambda p(1 - \sqrt{p^{-1}\lambda^{-1}\ln^2\lambda}), \lambda p(1 + \sqrt{p^{-1}\lambda^{-1}\ln^2\lambda})\right)$, $\lambda = o(n^{1/3})$, *тогда при* $n \to \infty$ *со сходящейся к 1 вероятностью верно соотношение*

$$\mathcal{L}_l(\ell;k) \in \mathfrak{D}_p(\lambda). \tag{27}$$

На втором этапе цикла $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$ (скрещивании) величина $\Delta'_{k,l}$ зависит только от l позиций, на которых компоненты у типов частиц x и x′ различаются. При скрещивании у типа x каждая из этих компонент независимо друг от друга заменяется на другую с вероятностью $1/\lambda$. Как отмечалось ранее, при скрещивании у частицы типа x изменяется число компонент, приближающееся распределением Пуассона со средним порядка 1, а предельными для распределения максимума Пуассонаовых случайных величин могут быть только вырожденные. Следовательно, мы можем оценивать только сходящиеся к 0 или 1 вероятности для хвостов распределений $\Delta^*_{k,l} = |\mathrm{y}| - k$. Это приведет к оценкам для условной величины приращения $\mathcal{T}_{n,l}(k)$ и безусловного приращения $\mathcal{T}_n(k)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} &\psi_n = \psi_n(\overline{p},\lambda,\delta) := (\delta\ln\ln\ln\lambda - c)/\ln\ln\lambda > -1, \\ &\Delta_n = \Delta_n(\overline{p},\lambda,\delta) := (\ln\ln\lambda + \delta\ln\ln\ln\lambda - c)/\ln\ln\lambda > 0, \end{aligned} \tag{28}$$

где $\overline{p} \in (0,1)$, $c := -\ln\overline{p}$ и $\delta \in [1, 1+C)$, а $C \in \mathbb{R}_+$ произвольное фиксированное. Отметим, что $\Delta_n = 1 + \psi_n$.

Теорема 6. *Пусть в цикле* $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$, $n \to \infty$, $\lambda = \lambda(n) \to \infty$, $p = p(n) = k/n \in (0,\underline{p}]$, *где* $0 < \underline{p} < 1$, $\lambda = o(n^{1/3})$, $\Delta_n(p,\lambda,\delta)\ln\lambda\ln^{-2}\ln\lambda \to \infty$ *и выполнено одно из двух условий: либо* $\delta = 1$, *либо для некоторых* $\delta \in (1,1+C)$ *и* $\delta_2 \in (\delta - 1, C]$ *выполняются неравенства* $\ln^2 p \geq (\delta_2 + \delta - 1)\ln\ln\lambda\ln\ln\ln\lambda$.

Тогда верно соотношение

$$\mathbf{E}[\mathcal{T}_n(k)] \geq \ln\lambda\Delta_{p,\lambda}\ln^{-2}\ln\lambda(1+o(1)). \tag{29}$$

В частности, для $\beta \in (0,1)$ *справедливы оценки*

$$\mathbf{E}[\mathcal{T}_n(k)] \geq \begin{cases} \ln\lambda\ln^{-1}\ln\lambda(1+o(1)), & \textit{при} \quad p^{-1} = o(\ln\lambda), \\ (1-\beta)\ln\lambda\ln^{-1}\ln\lambda(1+o(1)), & \textit{при} \quad p^{-1} \sim \ln^{\beta}\lambda, \\ (1-\beta)\ln\ln\ln\lambda\ln^{-2}\ln\lambda(1+o(1)), & \textit{при} \quad \ln\lambda/p \sim \ln^{\beta}\ln\lambda. \end{cases} \tag{30}$$

В теореме 6 в циклах $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$ оценены средние значения величины приращений $Z_n(s) - Z_n(s+1)$ в случае неограниченного роста n. Для приложений актуально описать свойства вероятностей наличия положительного приращения $Z_n(s) - Z_n(s+1) > 0$ на циклах $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$.

Теорема 7. *В серии циклов $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$ с параметрами $n\in\mathbb{N}$, $\mu=\mu(n)=O(n\ln^2 n)$, $\lambda=\lambda(n)\to\infty$, $\lambda=o\big(n^{1/3}\big)$, $p=p(n)=k/n\to 0$, при $n\to\infty$, верны соотношения*

$$\mathbf{P}(\tau_n(k)=1)\ge\big(1-e^{-k\lambda^2(1+o(1))/n}(1+o(1))\big)(1-e^{-e^{-1}})(1+o(1)),\quad(31)$$

$$\mathbf{E}[\tau_n(k)]\le\big(1-e^{-k\lambda^2(1+o(1))/n}(1+o(1))\big)^{-1}(1-e^{-e^{-1}})^{-1}(1+o(1)).\quad(32)$$

В частности, при $p=o(1)$

$$\mathbf{E}[\tau_n(k)]\le\begin{cases}(1+o(1))\big(1-e^{-e^{-1}}\big)^{-1}, & \text{при}\quad p\gg\lambda^{-2},\\ \big(1-e^{-e^{-1}}\big)^{-1}(1-e^{-0.5})^{-1}(1+o(1)), & \text{при}\quad p\ge 0.5\lambda^{-2},\\ n\big(1-e^{-e^{-1}}\big)^{-1}k^{-1}\lambda^{-2}(1+o(1)), & \text{при}\quad p=o(\lambda^{-2}),\\ 2n\big(1-e^{-e^{-1}}\big)^{-1}k^{-1}\lambda^{-2}(1+o(1)), & \text{при}\quad p\le 0.5\lambda^{-2}.\end{cases}\quad(33)$$

Если положить, что $p\gg\lambda^{-1}\ln^3\lambda$, то при $n\to\infty$ верны соотношения

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_n(k)>0)\to 1,\quad \mathbf{E}[\tau_n(k)]\to 1.\quad(34)$$

Теорема 8. *Если для ДМСП цепей Маркова $\{Z_{n,\mu(n),\lambda(n)}(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ при $n\to\infty$ выполняются условия $\mu=\mu(n)=O(n\ln^2 n)$, $\lambda(n)=o\big(n^{1/3}\big)$ и $\lambda(n)\to\infty$, то верна оценка*

$$\mathbf{E}[\tau_n]\le\mathcal{E}_n(\lambda(n)):=0.5n\frac{\ln\ln\lambda(n)}{\ln\lambda(n)}(1+o(1))+\frac{n(\ln n-2\ln\lambda(n))(1+o(1))}{\big(1-e^{-e^{-1}}\big)\lambda^2(n)}.\quad(35)$$

Если $\lambda(n)\sim n^\gamma L(n)$, где $\gamma\in(0,1/3)$ и $L(n)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, то неравенство (35) принимает вид

$$\mathbf{E}[\tau_n]\le 0.5n\gamma^{-1}\ln\ln n(1+o(1))/\ln n.\quad(36)$$

Минимум $\lambda(n)\mathbf{E}[\tau_n]$ по $\lambda(n)$ достигается при

$$\lambda(n)\sim\sqrt{\ln n\ln\ln n\big(1-e^{-e^{-1}}\big)^{-1}/\ln\ln\ln n}\quad(37)$$

и представление (35) принимает вид

$$\mathbf{E}[\tau_n]\le n\ln\ln\ln n\ln^{-1}\ln n(1+o(1)).\quad(38)$$

Этот результат можно считать стохастическим аналогом оценки (1), полученной в [4]. Любое из соотношений (36) и (38) можно выбрать в качестве оптимального. Все зависит от сложности выполнения вычислительных процедур. Довольно естественно, что после выбора тестовых векторов детерминированный подход эффективнее направленного стохастического поиска. Однако не ясно, какой из подходов проще для приложений. Проблема в оценке сложности поиска конкретного набора тестовых векторов и программно-аппаратного обеспечения.

3.2 Доказательство теоремы 5

Пусть цикл $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$, порождается частицей типа x, у которой $n-k$ компонент "1" и k компонент "0", а l — фиксированное случайное значение $\ell \in \mathcal{B}(n,\lambda/n)$. Далее на этапе мутации λ раз независимым образом случайно выбирается l позиций для мутации. Количество "0" в этих позициях подчиняется гипергеометрическому распределению $\mathcal{HG}(n,k,l)$.

Хорошо известно, что гипергеометрическое распределение аппроксимируется биномиальным распределением (см., например, теорему 1.3.1 в [6]). Уточним последнюю теорему для применения ее в схеме серий.

Теорема 9. *Пусть* $\eta_g=\eta_g(n,n_1,l)\in\mathcal{HG}(n,n_1,l)$, $n,n_1,l,l_1\in\mathbb{N}$, $n_1\le \underline{p}n$, *где* $0<\underline{p}<1$, $n_2=n-n_1$, $l=l(n)=o(\sqrt{n})$, $n,l\to\infty$, $l_1\le lp+(lp)^\gamma$ *при любом фиксированном* $0.5<\gamma<1$, $n_1/n=p$, $n_2/n=q$, $\eta_b\in\mathcal{B}(l,p)$.

Тогда $\mathbf{E}[\eta_g]=\mathbf{E}[\eta_b]=lp$, $\mathrm{Var}[\eta_g]\sim\mathrm{Var}[\eta_b]=lpq$ *и при* $n\to\infty$ *верно соотношение*

$$\big|P_{n,n_1}(l,l_1)-P_p(l,l_1)\big|=O(l^2/n)P_p(l,l_1), \tag{39}$$

где оценка $O(l^2/n)$ *равномерная по* l_1.

В частности, справедливо представление

$$P_{n,n_1}(l,0)=(1-n_1/n)^l\big(1+O\big(l^2\max\{l,n_1\}/n^2\big)\big). \tag{40}$$

Доказательство. По определению после тождественных преобразований получаем

$$P_{n,n_1}(l,l_1)=\binom{l}{l_1}\frac{(n-l)!}{n!}\frac{n_1!n_2!}{(n_1-l_1)!(n_2-l_2)!}.$$

По формулам Тейлора $\ln(1-x)=-x+0.5x^2(1+o_x(1))$ и $e^x=1+x+0.5x^2(1+o(1))$ при $x\to0$ и в случае $x=l^2n^{-1}\to0$ при $n\to\infty$, верны оценки

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-l)!}&=\prod\nolimits_{i=0}^{l-1}(n-i)=n^l\exp\Big\{\sum\nolimits_{i=0}^{l-1}\ln(1-in^{-1})\Big\}\\ &= n^l\exp\Big\{\sum\nolimits_{i=0}^{l-1}(-in^{-1}+0.5i^2n^{-2}(1+o(1))\Big\}\\ &= n^l\exp\big\{-0.5l(l-1)n^{-1}+(1+o(1))(l-1)l(2l-1)n^{-2}/12\big\}\\ &= n^l\exp\big\{-0.5l(l-1)n^{-1}(1+o(1))\big\}=n^l\big(1+O(l^2/n)\big).\end{aligned} \tag{41}$$

В силу условия $n_1\le(1-\underline{p})n$ при замене в цепочке оценок (41) аргументов l и n на $l_2\le l$ и n_2 получается асимптотическое представление

$$\frac{n_2!}{(n_2-l_2)!}=n_2^{l_2}\big(1+O\big(l_2^2/n\big)\big), \tag{42}$$

где компонента $O\big(l_2^2/n\big)$ будет равномерной по l_2, так как $l_2 \le l$ и $n_2 \ge (1-\underline{p})n$.

Третья дробь $\dfrac{n_1!}{(n_1-l_1)!}$ в случае $l_1 = o(\sqrt{n_1})$ по аналогии с представлением (41) эквивалентна $n_1^{l_1}$. Однако, если воспользоваться схемой доказательства из цепочки (41) без последнего шага, где все преобразования верны при $l = o(n)$, то при $l_1 = o(n_1)$ приходим к оценке

$$\frac{n_1!}{(n_1-l_1)!} = n_1^{l_1} \exp\left\{-0.5 l_1(l_1-1)n_1^{-1}(1+o(1))\right\}. \tag{43}$$

Отметим, что из условия $l_1 \le lp + (lp)^\gamma$ следует $l_1 = o(n_1)$ и $l_1(l_1 - 1)n_1^{-1} = O(l^2p/n)$.

В результате из представлений (41)–(43) получаем

$$P_{n,n_1}(l,l_1) = \binom{l}{l_1}\frac{n_1^{l_1}}{n^{l_1}}\frac{n_2^{l_2}}{n^{l_2}}(1+O(l^2p/n)),$$

что доказывает оценку (39) при $l_1 > 0$. Если $l_1 = 0$, то она следует из соотношений (41) и (42), а представление (40) получается из предпоследней оценки в цепочке преобразований (41) и ее аналога при замене n на $n - n_1$ с учетом тождества $(n-n_1)^{-1} - n^{-1} = n_1(n-n_1)^{-1}n^{-1}$.

Соотношение $\mathrm{Var}[\eta_g] = lpq(n-l)(n-1)^{-1} \sim lpq$ очевидно. □

Эта теорема позволяет аппроксимировать гипергеометрическое распределение биномиальным, для которого известно распределение максимума независимых случайных величин.

Перепишем определение (9) в терминах $\eta_b = \eta_b(n,k,l) \in \mathcal{B}(l,p)$ (здесь и далее полагаем $n_1 = k$) при замене z на $u_\lambda(x) = b_\lambda + x a_\lambda^{-1}$.

$$F_l(p;u_\lambda(x)) = \mathbf{P}\big(\eta_b < u_\lambda(x)\sqrt{lpq} + lp\big) =: \mathbf{P}\big(\widetilde{\eta}_b(n,k,l) < u_\lambda(x)\big).$$

Положим

$$G_l(p;u_\lambda(x)) := \mathbf{P}\big(\eta_g < u_\lambda(x)\sqrt{lpq} + lp\big) =: \mathbf{P}\big(\widetilde{\eta}_g(n,k,l) < u_\lambda(x)\big),$$

$\widetilde{\eta}^*_{b,\lambda} = \widetilde{\eta}^*_{b,\lambda}(n,k,l) := \max_{1\le i\le\lambda}\left\{\widetilde{\eta}_b^{(i)}\right\}$ и $\widetilde{\eta}^*_{g,\lambda} = \widetilde{\eta}^*_{g,\lambda}(n,k,l) := \max_{1\le i\le\lambda}\left\{\widetilde{\eta}_g^{(i)}\right\}$. где $\widetilde{\eta}_b^{(i)}$ и $\widetilde{\eta}_g^{(i)}$ независимые стохастические копии $\widetilde{\eta}_b = \widetilde{\eta}_b(n,k,l)$ и $\widetilde{\eta}_g = \widetilde{\eta}_g(n,k,l)$, соответственно.

Теорема 10. *Пусть $\eta_b \in \mathcal{B}(l,p)$, $\eta_g \in \mathcal{HG}(n,k,l)$, $p = p(n) = k/n \in (0,\underline{p}]$, выполнены условия леммы 2 с $S_l = \eta_b$ и теоремы 9 с $n_1 = k$, а $l \in \mathfrak{D}(\lambda) = [\lambda - \lambda^\gamma, \lambda + \lambda^\gamma]$, $0.5 < \gamma < 1$, и $l^3n^{-1} = o(1)$, тогда при $n \to \infty$ имеет место равномерная по $l \in \mathfrak{D}(\lambda)$ сходимость*

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{\eta}^*_g < u_\lambda(x)\big) \to \exp\big\{-e^{-x}\big\}. \tag{44}$$

Доказательство. В условиях теоремы собрано три типа ограничений. Согласование их приведено в формулировке теоремы 5 и будет обосновано на заключительном этапе доказательства последней.

Учитывая неравенство для разности степеней двух функций и соотношение (39), получаем оценку

$$\left|G_l^\lambda(p;u_\lambda(x)) - F_l^\lambda(p;u_\lambda(x))\right| = O(\lambda^3 n^{-1}). \tag{45}$$

Утверждение теоремы следует из неравенства треугольника

$$\left|G_l^\lambda(p;z_\lambda) - \Phi^\lambda(u_\lambda(x))\right| \le \left|G_l^\lambda(p;z_\lambda) - F_l^\lambda(p;z_\lambda)\right| + \left|F_l^\lambda(p;z_\lambda) - \Phi^\lambda(u_\lambda(x))\right|$$

оценки (45) и лемм 1 и 2. □

Завершение доказательства теоремы 5. Данная теорема является очевидным следствием теоремы 10. Покажем, что их условия совпадают. Условие $\eta_g \in \mathcal{HG}(n,k,l)$ соответствует первой части цикла $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$, описываемой в теореме 5. Общее для обеих теорем условие $l \in \mathfrak{D}(\lambda)$ позволяет заменить ограничения на параметры (21) в лемме 2 на условия $\lambda \to \infty$ и $p \gg \lambda^{-1}\ln^3\lambda$. Ограничение на $n_1 = k$ с использованием параметра $\underline{p}$ в теоремах 5 и 9 совпадают. Условие $l^3 n^{-1} = o(1)$, добавленное в теорему 10 и присутствующее в теореме 5, обеспечивает выполнение остальных ограничений в теореме 9.

Опишем связи между случайными величинами $\mathcal{L}_l(\ell;k)$, $\Delta'(n,k,l)$ и $\widetilde{\eta}^*_{g,\lambda} = \widetilde{\eta}^*_{g,\lambda}(n,k,l)$.

Пусть $\Sigma(n,k,l) := \eta_g - (l-\eta_g) = 2\eta_g - l$ – величина приращения нормы в отдельном эксперименте на первом этапе цикла $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$. По результатам λ независимых экспериментов на первом этапе получаем значения $\Sigma^{(i)}(n,k,l)$, $i = 1,\dots,\lambda$. При переходе от частицы типа x к частице типа x' приращение нормы равно

$$|\mathrm{x}'| - |\mathrm{x}| = \Delta'(n,k,l) = \max_{1\le i\le\lambda} \Sigma^{(i)}(n,k,l) = 2\bigl(\max_{1\le i\le\lambda} \eta_g^{(i)} - lp\bigr) + (2p-1)l.$$

По определению

$$\eta_g^{(i)} - lp = \widetilde{\eta}_g^{(i)}(n,k,l)\sqrt{lpq}$$

и

$$\Delta'(n,k,l) - (2p-1)l/(2\sqrt{lpq}) = \widetilde{\eta}^*_{g,\lambda}. \tag{46}$$

Из соотношения (44) следует, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ на числовой прямой существует не зависящий от n и $l \in \mathfrak{D}(\lambda)$ компакт K такой, что для $U_K := \{u_\lambda(x) : x \in K\}$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\bigl(\widetilde{\eta}^*_{g,\lambda} \in U_K\bigr) \ge 1 - \varepsilon.$$

При этом условие $x \in K$ влечет равномерную по λ оценку $u_\lambda(x) = \sqrt{2\ln\lambda}(1+o(1))$. Более того, из определения $u_\lambda(x) = b_\lambda + xa_\lambda^{-1}$ следует, что можно выбрать и семейство неограниченно растущих компактов K_n таких, что для $U_{K_n} := \{u_\lambda(x) : x \in K_n\}$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{\eta}^*_{g,\lambda} \in U_{K_n}\big) \geq 1 - \varepsilon_n, \tag{47}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ и при $x \in K_n$ верна оценка $u_\lambda(x) = \sqrt{2\ln\lambda}(1+o(1))$.

Последние условия сформулируем следующим образом: для $\widetilde{\eta}^*_{g,\lambda}$ со сходящейся к 1 вероятностью верна оценка $u_\lambda(x) = \sqrt{2\ln\lambda}(1+o(1))$ или $u_\lambda(x) \sim \sqrt{2\ln\lambda}$. Это условие будет действовать и для функций, отличных от $u_\lambda(x)$.

Представления (46) и (47) позволяют утверждать, что со сходящейся к 1 вероятностью

$$\Delta'(n,k,l) \sim (2p-1)l + 2\sqrt{lpq}\sqrt{2\ln\lambda}. \tag{48}$$

Более точно,

$$\mathbf{P}\big(\Delta'(n,k,l) \leq (2p-1)l + 2\sqrt{lpq}\, u_\lambda(x)\big) \to \exp\{-e^{-x}\}. \tag{49}$$

Обозначим $\mathcal{K}_n(l,p) := \big\{x : \big|\sqrt{lpq}\big(b_\lambda + xa_\lambda^{-1}\big)\big| \leq \sqrt{p\lambda\ln^2\lambda}\big\}$. Очевидно, что нижняя и верхняя границы множества $\mathcal{K}_n(l,p)$ стремятся к $-\infty$ и $+\infty$ при $n \to \infty$ и $l^{-1}p^{-1}\sqrt{lpq}\big(b_\lambda + xa_\lambda^{-1}\big) \leq \sqrt{l^{-1}p^{-1}q\ln^2\lambda} \to 0$, если выполнены условия $p \gg \lambda^{-1}\ln^3\lambda$ и $l \in \mathfrak{D}(\lambda)$.

Поэтому со сходящейся к 1 вероятностью

$$\Delta'(n,k,l) \in \mathcal{K}_n(l,p). \tag{50}$$

В терминах $\mathcal{L}_l(\ell;k)$ утверждение (49) записывается в виде

$$\mathbf{P}\big(\mathcal{L}_l(\ell;k) \leq lp + \sqrt{lpq}(b_\lambda + x/a_\lambda)\big) \to \exp\{-e^{-x}\},$$

а из соотношения (50) следует утверждение теоремы 10.

Отметим, что в условиях теоремы

$$\lambda p\left(1 \pm \sqrt{p^{-1}\lambda^{-1}\ln^2\lambda}\right) = \lambda p(1 + o(\ln^{-0.5}\lambda)). \tag{51}$$

$\square$

3.3 Доказательство теоремы 6

После первого этапа мутаций в цикле $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$, проводится процедура скрещивания для частиц типов x и x′, которая независимо повторяется λ раз. В этом случае для описания количества изменяемых в x позиций, имеющих биномиальное распределение, можно воспользоваться теоремой Пуассона (см. теорему 5.4.1 в [6]). Однако в последней теореме оценка равномерная по всей области, и мы ее уточним.

Положим $l \in \mathfrak{D}(\lambda) = [\lambda - \lambda^\gamma, \lambda + \lambda^\gamma]$, $0.5 < \gamma < 1$, что в силу включения $\ell \in \mathcal{B}(n,\lambda)$ влечет выполнение данного условия с вероятностью сходящейся к 1, а при грубых оценках можно использовать соотношение $l = \lambda(1+o(1))$.

Число битовых позиций с состояниями “0” на l мутировавших у частицы типа x при переходе в тип x′ – $\mathcal{L}_l(\ell;k)$ оценено в соотношении (27).

Пусть $\mathcal{L}_l(\ell;k) = k_{0,l}$, $l - k_{0,l} = k_{1,l}$, $p = k/n$, $q = (n-k)/n$,

$$\widetilde{p}_{0,l} := k_{0,l}/l = p\Big(1 + O\Big(\sqrt{p^{-1}\lambda^{-1}\ln^2\lambda}\Big)\Big) = p(1 + o(\ln^{-0.5}\lambda)) \tag{52}$$

что верно в силу представлений (27) и (51) и условия $l \in \mathfrak{D}(\lambda)$, $\widetilde{p}_{1,l} = \widetilde{q}_{0,l} =: 1 - \widetilde{p}_{0,l}$. При однократном скрещивании частиц типов x и x′ по l позициям обозначим через $\eta_{0,l} = \eta_{0,l}(n) \in \mathcal{B}(k_{0,l},\lambda^{-1})$ – количество замен позиций со значением “0” на значения “1” в x, а $\eta_{1,l} = \eta_{1,l}(n) \in \mathcal{B}(k_{1,l},\lambda^{-1})$ количество замен “1” на “0” в x. Напомним обозначения для случайных величин $\eta \in \mathcal{P}(a)$: $\Pi_a(A) = \mathbf{P}(\eta \in A)$, $A \subseteq \mathbb{N}_0$, $\Pi_{a,s} = \mathbf{P}(\eta < s)$, $\overline{\Pi}_{a,s} = \mathbf{P}(\eta \geq s)$.

Опишем свойства случайных последовательностей $\eta_{j,l} \in \mathcal{B}(k_{j,l},\lambda^{-1})$, $j = 0,1$ в схеме серий, в терминах предельных для них распределений Пуассона. Нас интересуют асимптотические свойства максимума у случайных величин $\eta_{j,l}^{(i)}$, $j = 0,1$, $i \in \mathbb{N}_\lambda$, являющихся независимыми стохастическими копиями величин $\eta_{j,l}$ при $\lambda \to \infty$. Свойства максимума $\eta_{j,l}^* = \max_{1\leq i\leq\lambda}\eta_{j,l}^{(i)}$ опишем с помощью предельных для них распределений Пуассона. При этом обязательно нужно учитывать точность аппроксимации $\eta_{j,l}$ распределением Пуассона.

Приведем утверждение теоремы 5.4.1 из [6].

Теорема 11. *Пусть $\widetilde{\eta} \in \mathcal{B}(\widetilde{l},\lambda^{-1})$ и $\eta \in \mathcal{P}(\widetilde{l}\lambda^{-1})$, тогда для любого подмножества $B \subset \mathbb{N}_{0,l}$ верно неравенство*

$$|\mathbf{P}(\widetilde{\eta} \in B) - \mathbf{P}(\eta \in B)| \leq \widetilde{l}\lambda^{-2}. \tag{53}$$

Утверждение теоремы (53) запишем в виде

$$\left|\mathbf{P}(\widetilde{\eta} \geq s) - \overline{\Pi}_{\widetilde{p},s}\right| \leq \widetilde{l}\lambda^{-2} \sim \widetilde{p}\lambda^{-1},\ \widetilde{p} := \widetilde{l}\lambda^{-1},\ \forall\, s \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{54}$$

Соотношение (54) для $\eta_{0,l}$ принимает вид

$$\left|\mathbf{P}(\eta_{0,l} \geq s) - \overline{\Pi}_{\widetilde{p}_{0,l},s}\right| \leq k_{0,l}\lambda^{-2} \sim \widetilde{p}_{0,l}\lambda^{-1}, \ \forall s \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{55}$$

Теорема Пуассона для $\eta_{0,l}$ в случае $k_{0,l} = o(\lambda^2)$ дает равномерную оценку (55) для точности приближения распределения $\mathcal{B}\big(k_{0,l}, \lambda^{-1}\big)$ через $\mathcal{P}\big(k_{0,l}\lambda^{-1}\big)$ по всем наборам s, но она учитывает достаточно большие отклонения при малых значениях случайных величин $\eta_{0,l}$. Нас интересуют более точные верхние и нижние оценки для $\mathbf{P}(\eta_{0,l} > s)$ с помощью распределения Пуассона при больших s.

Верхняя оценка (у нас $\widetilde{p}_{0,l} < 1$) приведена в следствии 4 из [11] и имеет вид

$$\mathbf{P}(\eta_{0,l} \geq s) < \overline{\Pi}_{\widetilde{p}_{0,l},s}, \ \forall s > \widetilde{p}_{0,l} + 1. \tag{56}$$

При больших s следующую из соотношения (54) нижнюю оценку для $\mathbf{P}(\eta_{0,l} \geq s)$ можно существенно улучшить.

Приведем в общем виде двустороннюю оценку для биномиального распределения в терминах Пуассоновского.

Лемма 3. *Пусть* $\overline{\eta} \in \mathcal{B}(\overline{l}, \lambda^{-1})$, $\overline{l} = \overline{l}(n) \to \infty$, $s = s(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *и* $s < \sqrt{2\gamma_{\Pi}\overline{l}}$, $\gamma_{\Pi} \in (0,1)$, $\lambda = \lambda(n)$ *и* $\overline{p} = \overline{l}\lambda^{-1} \in (0, c_1) \in \mathbb{R}^+$ *для некоторого* c_1*, не зависящего от* n*, тогда при достаточно больших* n *верна оценка*

$$\big(1 - 0,5c_2 s^2 \overline{l}^{-1}\big)\Pi_{\overline{p}}(s) \leq \mathbf{P}(\overline{\eta} \geq s) < \overline{\Pi}_{\overline{p},s} \leq Pi_{\overline{p}}(s)/(1 - \overline{p}(s+1)^{-1}), \tag{57}$$

где $c_2 > 1$ *и* $\gamma_{\Pi} c_2 < 1$.

Доказательство. Приведем довольно очевидную оценку (1) из [12]

$$\Pi_{\overline{p}}(s) e^{\overline{p}} = \overline{p}^s/s! \leq \sum\nolimits_{k \geq s} \overline{p}^k/k! \leq \overline{p}^s/(s!(1 - \overline{p}(s+1)^{-1})),$$

где $\overline{p} > 0$ – произвольное. Последнюю оценку запишем в виде

$$\Pi_{\overline{p}}(s) \leq \overline{\Pi}_{\overline{p},s} \leq \Pi_{\overline{p}}(s)/(1 - \overline{p}(s+1)^{-1}). \tag{58}$$

Оценка сверху в неравенствах (57) следует из записанного в других обозначениях неравенства (56) и второй части оценки (58).

В условиях данной леммы представление, приведенное после оценки (5.4.4) из [6], имеет вид

$$P_{\overline{p}}(\overline{l}, s) = \big(1 + (s - (s - \overline{p})^2)/(2\overline{l}) + O\big((\overline{s}^3 + \overline{p}^3)/\overline{l}^2\big)\Pi_{\overline{p}}(s). \tag{59}$$

Это соотношение естественно получается из определения $P_{\overline{p}}(\overline{l}, s)$ после представления произведения в виде экспоненты в степени суммы логарифмов сомножителей и применения к логарифмам формулы Тейлора.

При $s, \overline{l} \to \infty$ и $s < \sqrt{2\gamma_\Pi \overline{l}}$ оценку (59) можно записать в виде

$$P_{\overline{p}}(\overline{l}, s) = \big(1 - 0.5 s^2 \overline{l}^{-1}(1 + o(1))\big)\Pi_{\overline{p}}(s),$$

что завершает доказательство леммы. □

Для описания свойств распределения $\overline{\eta}^* = \max_{1\le i\le\lambda}\{\overline{\eta}^{(i)}\}$, где $\overline{\eta}^{(i)} \in \mathcal{P}(\overline{p})$ независимы в совокупности при фиксированном n, а $\overline{p} = \overline{p}(n)$, изучим асимптотическое поведение

$$\lambda\Pi_{\overline{p}}(s) =: \lambda e^{-\overline{p}} e^{-cs}/s!, \tag{60}$$

где $s \in \mathbb{N}$ и $s \to \infty$.

Исследуем асимптотику $\lambda\Pi_{\overline{p}}(s_\Delta)$ в случае $s_\Delta := [\Delta_n \ln\lambda/\ln\ln\lambda] \to \infty$. Условие $s_\Delta \to \infty$ более ограничительное чем $\Delta_n > 0$. Запишем его в виде

$$\ln\ln\lambda + \delta\ln\ln\ln\lambda - c \gg \ln^2\ln\lambda/\ln\lambda. \tag{61}$$

Лемма 4. *Пусть $\lambda = \lambda(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, и $\Pi_{\overline{p}}(s)$ с $s = s_\Delta$ удовлетворяет условиям (60) и (61), тогда соотношение $\lambda\Pi_{\overline{p}}(s) \to \infty$ верно при $\delta = 1$ и при $\delta > 1$ в случае $c^2 \ge \delta_2 \ln\ln\ln\lambda\ln\ln\lambda$, где $\delta - 1 < \delta_2 \le C$ произвольное фиксированное, а соотношение $\lambda\Pi_{\overline{p}}(s) \to -\infty$ верно при $\delta > 1$ и $c^2 \le \delta_1 \ln\ln\ln\lambda\ln\ln\lambda$, где $0 < \delta_1 \le \delta - 1$ – произвольное фиксированное.*

Доказательство. [*Доказательство.*] Приведем теорему 1.4.10 (формулу Стирлинга) из [13]

$$s! = \sqrt{2\pi s}\, s^s e^{-s} R(s), \quad s \in \mathbb{N}, \tag{62}$$

где $1 < e^{\frac{1}{12s+1}} < R(s) < e^{\frac{1}{12s}} < 1.08690405$.

Используя определения (28), легко получить представления

$$\begin{aligned}
& s\ln s = \Delta_n \ln\lambda(\ln\ln\lambda + \ln\Delta_n - \ln\ln\ln\lambda)/\ln\ln\lambda \\
= \ & (1 + \psi_n)\ln\lambda + \big(\ln\Delta_n - \ln\ln\ln\lambda\big)\ln\lambda\Delta_n/\ln\ln\lambda \\
= \ & \ln\lambda + \ln\lambda((\delta - \Delta_n)\ln\ln\ln\lambda + \Delta_n\ln\Delta_n - c)/\ln\ln\lambda, && (63) \\
& e^{-sc}e^s/\sqrt{2\pi s} = e^{-(c-1)s}/\sqrt{2\pi\Delta_n\ln\lambda/\ln\ln\lambda} \\
= \ & \sqrt{\ln\ln\lambda/(2\pi\Delta_n\ln\lambda)}\exp\{\Delta_n(1-c)\ln\lambda/\ln\ln\lambda\}. && (64)
\end{aligned}$$

Из тождества (63) следует соотношение

$$s^{-s} = e^{-s\ln s} = \lambda^{-1}\exp\{\ln\lambda(c + (\Delta_n - \delta)\ln\ln\ln\lambda - \Delta_n\ln\Delta_n)/\ln\ln\lambda\}. \tag{65}$$

Вычислим сумму показателей степеней экспонент из представлений (64) и (65)

$$\mathcal{S}_n(c,\delta) := (\Delta_n(1-c) + c + (\Delta_n - \delta)\ln\ln\ln\lambda - \Delta_n\ln\Delta_n)\ln\lambda/\ln\ln\lambda,$$

которая при подстановке $\Delta_n = 1+\delta \ln\ln\ln\lambda/\ln\ln\lambda - c/\ln\ln\lambda$ приобретает вид

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_n(c,\delta) = \big(1 + (c^2 - c + (\delta - c\delta - c)\ln\ln\ln\lambda + \delta\ln^2\ln\ln\lambda)/\ln\ln\lambda \\ + \quad &(1-\delta)\ln\ln\ln\lambda - \Delta_n \ln\Delta_n\big)\ln\lambda/\ln\ln\lambda =: \mathcal{S}_n^0(c,\delta)\ln\lambda/\ln\ln\lambda.\end{aligned}$$

По определению $0 < \Delta_n < 1 + o(1)$, а так как $x\ln x \in [-e^{-1}, 0]$ при $x \in (0,1]$, то верна оценка

$$-C\ln C \le -\Delta_n \ln\Delta_n \le e^{-1}. \tag{66}$$

Формально верно представление

$$\lambda\Pi_{\overline{p}}(s) = \exp\big\{\ln\sqrt{\ln\ln\lambda/(2\pi\Delta_n\ln\lambda)} + \mathcal{S}_n(c,\delta)\big\}R(s). \tag{67}$$

Докажем, что при $\delta = 1$ верна оценка $\mathcal{S}_n^0(c,\delta) \ge 1 + o(1)$. В самом деле, второе его слагаемое (дробь) является $o(1)$ при $c = o(\sqrt{\ln\ln\lambda})$, а в случае $c \ge \varepsilon\sqrt{\ln\ln\lambda}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно, оно эквивалентно $c^2\ln\ln\lambda$. Осталось учесть оценку (66) и то, что первое слагаемое в соотношении (67) является бесконечно малым относительно $\ln\lambda/\ln\ln\lambda$, и получить первую часть утверждения леммы: $\lambda\Pi_{\overline{p}}(s) \to \infty$ при $\delta = 1$.

Если $\delta \in (1, 1+C)$, то определяющим слагаемым в $\mathcal{S}_n^0(c,\delta)$ является $(1-\delta)\ln\ln\ln\lambda \to -\infty$. При $c^2/\ln\ln\lambda = o(\ln\ln\ln\lambda)$ остальные слагаемые бесконечно малы относительно него, а при $c^2 = \delta_0\ln\ln\ln\lambda\ln\ln\lambda$, где $0 < \delta_0 \le \delta_1$, верна оценка $\mathcal{S}_n^0(c,\delta) = (\delta_1 + 1 - \delta)\ln\ln\ln\lambda \to -\infty$. В случае $c^2 > \delta_2\ln\ln\ln\lambda\ln\ln\lambda$ верно неравенство $\mathcal{S}_n^0(c,\delta) > (\delta_2 + 1 - \delta)\ln\ln\ln\lambda \to \infty$.

Как уже отмечалось ранее, первое слагаемое в соотношении (67) является бесконечно малым относительно $\ln\lambda/\ln\ln\lambda$, что доказывает оба утверждения леммы в случае $\delta \in (1, 1+C)$: верны оценки $\lambda\Pi_{\overline{p}}(s) \to -\infty$ при $c^2 < \delta_1\ln\ln\ln\lambda\ln\ln\lambda$ и $\lambda\Pi_{\overline{p}}(s) \to \infty$ при $c^2 \ge \delta_2\ln\ln\ln\lambda\ln\ln\lambda$. $\square$

Напомним, что по определению $\eta_{0,l}$ и $\eta_{1,l}$ рассматриваются на цикле $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$ при условии $\mathcal{L}_l(\ell;k) \in \mathfrak{D}_p(\lambda)$. Из соотношения (52) следует, что вероятность события

$$k_{0,l} \in \big\{\big(p\lambda + \lambda\sqrt{\lambda^{-1}pq}\sqrt{2\ln\lambda}\big)(1 + o(1))\big\} \tag{68}$$

сходится к 1.

Пусть $\eta_l = \eta_{0,l} - \eta_{1,l}$, $\eta_l^* = \max_{1\le i\le\lambda}\big\{\eta_l^{(i)}\big\}$, где $\eta_l^{(i)}$ — независимые стохастические копии η_l, тогда распределение η_l^* совпадает с распределением $\Delta_{k,l}^*$ при условии $\mathcal{L}_l(\ell;k) = k_{0,l}$.

По теореме 11 распределение случайной величины $\eta_{0,l} \in \mathcal{B}\big(k_{0,l}, \lambda^{-1}\big)$ при $k_{0,l}\lambda^{-2} = \widetilde{p}_{0,l}\lambda^{-1} \to 0$, $n \to \infty$, сходится к Пуассоновскому $\mathcal{P}(\widetilde{p}_{0,l})$, а распределение $\eta_{1,l} \in \mathcal{B}\big(k_{1,l}, \lambda^{-1}\big)$ при $k_{1,l}\lambda^{-2} = \widetilde{p}_{1,l}\lambda^{-1} \to 0$, $n \to \infty$, – к Пуассоновскому $\mathcal{P}(\widetilde{p}_{1,l})$. Следовательно, при $n \to \infty$ и ограниченных $\widetilde{p}_{0,l}$ и $\widetilde{p}_{1,l}$ верны соотношения

$$\mathbf{P}(\eta_{j,l} = 0) \sim e^{-\widetilde{p}_{j,l}},\ \mathbf{P}(\eta_{j,l} \geq 1) = 1 - e^{-\widetilde{p}_{j,l}}(1 + o(1)),\ j = 1, 2, \qquad (69)$$

и $\mathbf{P}(\eta_{j,l} < s) \to 1$ при $s \to \infty$.

Обозначим $\eta^*_{0,l} = \max_{1\leq i\leq\lambda}\big\{\eta^{(i)}_{0,l}\big\}$, где $\eta^{(i)}_{0,l}$ — независимые стохастические копии $\eta_{0,l}$.

Опишем асимптотические свойства уклонений для $\eta^*_{0,l}$. Исследования основаны на утверждениях лемм 3 и 4 при замене $\overline{l}$ на $k_{0,l}$ и $\overline{p}$ на $\widetilde{p}_{0,l}$, что далее в лемме 5 предполагается выполненным.

Лемма 5. *Пусть в циклах $\mathcal{A}_{n,l}(k, \ell, \lambda)$, $l, n, k, \lambda \in \mathbb{N}$, $p = p(n) = k/n \in (0, \underline{p}]$, где $0 < \underline{p} < 1$, $\lambda = \lambda(n) \to \infty$, выполнены условия (61) и теоремы 5, $k_{0,l}$ удовлетворяет соотношению (68).*

Тогда оценка

$$\mathbf{P}\big(\eta^*_{0,l} \geq \ln\lambda\big(\ln\ln\lambda + \delta\ln\ln\ln\lambda + \ln\widetilde{p}_{0,l}\big)/\ln^2\ln\lambda\big) \to 1, \qquad (70)$$

верна в случаях $\delta = 1$ и $\delta \in (1, 1+C)$ при $\ln^2\widetilde{p}_{0,l} \geq (\delta_2+\delta-1)\ln\ln\lambda\ln\ln\ln\lambda$, где $\delta_2 \in (\delta - 1, C]$.

Если $1 < \delta < 1 + C$ и $c^2 \leq \delta_1\ln\ln\ln\lambda\ln\ln\lambda$, где $0 < \delta_1 < \delta - 1$, то верна оценка

$$\mathbf{P}\big(\eta^*_{0,l} \geq \ln\lambda(\ln\ln\lambda + \delta\ln\ln\ln\lambda + \ln\widetilde{p}_{0,l})/\ln^2\ln\lambda\big) \to 0. \qquad (71)$$

Доказательство. Условие (61) влечет в данной лемме выполнение всех ограничений на $c = -\ln p$ в теореме 5 и леммах 3 и 4. В утверждении леммы мы вместо $s = s_\Delta$ используем его явное выражение.

Менее ограничительное неравенство $\Delta_n > 0$, эквивалентное требованию $p^{-1} < \ln\lambda\ln^\delta\ln\lambda$, влечет условие $p \gg \lambda^{-1}\ln^3\lambda$ из теоремы 5.

В леммах 3 и 4 с $\overline{l} = k_{0,l}$ в силу условия $\ln\lambda\sqrt{\lambda^{-1}\ln\ln\lambda} \to 0$ при $\lambda \to \infty$ из соотношения (52) следует $\widetilde{p}_{0,l} = p(1 + o(1))$. Поэтому в силу того, что $\Delta_n \leq \ln\ln\lambda(1 + o(1))$ и $s = [\Delta_n\ln\lambda/\ln\ln\lambda] \to \infty$, верны оценки $\widetilde{p}_{0,l}s^{-1} \sim ps^{-1} \to 0$ и $s^2\lambda^{-1}\widetilde{p}^{\,-1}_{0,l} \sim \Delta^2_n\lambda^{-1}p^{-1}\ln^2\lambda\ln^{-2}\ln\lambda \leq p^{-1}\lambda^{-1}\ln^2\lambda\ln^2\ln\lambda \leq p^{-1}\lambda^{-1}\ln^3\lambda \to 0$. Поэтому по лемме 3 верно представление

$$\mathbf{P}(\eta_{0,l} \geq s) = \Pi_{\widetilde{p}_{0,l}}(s)(1 + o(1)). \qquad (72)$$

Как уже отмечалось в доказательстве леммы 1,

$$\mathbf{P}(\eta^*_{0,l} < s) = \mathbf{P}^\lambda(\eta_{0,l} < s) = (1 - \mathbf{P}(\eta_{0,l} \geq s))^\lambda = \exp\{\lambda\ln(1 - \mathbf{P}(\eta_{0,l} \geq s))\}. \quad (73)$$

Учитывая то, что $\mathbf{P}(\eta_{0,l} \geq s) \to 0$ при $s \to \infty$, и формулу Тейлора для логарифма, из соотношения (73) получаем

$$\mathbf{P}(\eta^*_{0,l} \geq s) = 1 - \exp\{-\lambda \mathbf{P}(\eta_{0,l} \geq s)(1 + o(1))\}. \tag{74}$$

Оценки (74) и (72) и лемма 4 влекут утверждение леммы 5. □

Выделим из леммы 5 случай выполнения соотношения (70) с явным видом требуемых условий из теоремы 5. Это приведет к оценкам средних в теореме 6. Из соотношения (71) без дополнительных исследований оценок средних снизу не следует.

Следствие 2. *Пусть в цикле* $\mathcal{A}_{n,l}(k, \ell, \lambda)$, $p = p(n) = k/n \in (0, \underline{p}]$, *где* $0 < \underline{p} < 1$, $k_{0,l}$ *удовлетворяет соотношению (68), выполнено условие (61) с* $\delta = 1$ *или* $\ln^2 \widetilde{p}_{0,l} \geq (\delta_2 + \delta - 1) \ln \ln \lambda \ln \ln \ln \lambda$ *для* $\delta \in (1, 1 + C)$ *и* $\delta_2 \in (\delta - 1, C]$, $l \in \mathfrak{D}(\lambda)$, $\lambda = o(n^{1/3})$, *тогда при* $n \to \infty$ *верно соотношение*

$$\mathbf{P}\big(\eta^*_{0,l} \geq \ln \lambda \Delta_n(p, \lambda) \ln^{-2} \ln \lambda (1 + o(1))\big) \to 1, \tag{75}$$

Доказательство. Утверждение следствия получается из оценки (70) при $\delta = 1$ и теоремы 5. В лемме 5 полагаются выполненными условия леммы 4. В частности, верно неравенство $\Delta_n(p, \lambda) > 0$, эквивалентное требованию $p^{-1} < \ln \lambda \ln \ln \lambda$, из которого следует условие $p \gg \lambda^{-1} \ln^3 \lambda$ из теоремы 5, что гарантирует выполнение допущений последней. Более того, условие (61) с $\delta = 1$, которое является основным в лемме 4 при $\delta = 1$, влечет неравенство $p^{-1} < \ln \lambda \ln \ln \lambda$.

Так как $\ln \lambda \sqrt{\lambda^{-1} \ln \ln \lambda} \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то из соотношения (52) в условиях данного следствия главные члены в асимптотических представлениях из леммы 4 при $\overline{p} = p$ и $\overline{p} = \widetilde{p}_{0,l}$ совпадают. Поэтому в условиях данного следствия утверждения леммы 5 сохраняются после замены $\widetilde{p}_{0,l}$ на p. Утверждение следствия является частным случаем оценки (70) при $\delta = 1$ после замены $\widetilde{p}_{0,l}$ на p.

Нам осталось проверить выполнение условий $\widetilde{p}_{0,l} s^{-1} \sim p s^{-1} \to 0$ и $s^2 \lambda^{-1} \widetilde{p}^{-1}_{0,l} \sim s^2 \lambda^{-1} p^{-1} \to 0$ из леммы 5, необходимых для эквивалентности левой и правой частей в неравенствах (57). Условие $p s^{-1} \to 0$ выполняется всегда, так как $s \to \infty$. □

Завершение доказательства теоремы 6. В обозначениях из данного раздела верно представление

$$\Delta^*_{k,l} = \Delta^*(n, k, l) = \max_{1 \leq i \leq \lambda} \big\{\eta^{(i)}_{0,l} - \eta^{(i)}_{1,l}\big\}.$$

Противоположные события будем обозначать исходным символом с чертой сверху. Например: $\overline{B} = \Omega \setminus B$ событие противоположное B.

При $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{aligned} A^{(i)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(s) &= A^{(i)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(n,s) := \{\eta^{(i)}_{0,l} - \eta^{(i)}_{1,l} \ge s\} \supseteq \{\eta^{(i)}_{0,l} \ge s,\, \eta^{(i)}_{1,l} = 0\} \\ &= \{\eta^{(i)}_{0,l} \ge s\}\{\eta^{(i)}_{1,l} = 0\} =: \widetilde{A}^{(i)}_{p_{0,l}}(s)\{\eta^{(i)}_{1,l} = 0\} = \grave{A}^{(i)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(s). \end{aligned} \tag{76}$$

Из оценок (69) и (76) следует неравенство

$$\mathbf{P}\big(A^{(i)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(s)\big) \ge \mathbf{P}\big(\grave{A}^{(i)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(s)\big) = \mathbf{P}\big(\widetilde{A}^{(i)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(s)\big)e^{-1+\widetilde{p}_{0,l}}(1+o(1)).$$

Последние соотношения и то, что $\mathbf{P}\big(\Delta^*_{k,l} \ge s\big) = \mathbf{P}(\mathcal{T}_{n,l}(k) \ge s)$, при выполнении условий следствия 2 позволяют записать цепочку тождественных преобразований и оценок

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\mathcal{T}_{n,l}(k) \ge s) = \mathbf{P}\big(\max_{1\le i\le\lambda}\{\eta^{(i)}_{0,l} - \eta^{(i)}_{1,l}\} \ge s\big) = 1 - \mathbf{P}^{\lambda}\big(\overline{A}^{(1)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(s)\big) \\ = \;& 1 - \big(1 - \mathbf{P}(A^{(1)}_{\widetilde{p}_{0,l}})(s)\big)^{\lambda} \ge 1 - \big(1 - \mathbf{P}\big(\grave{A}^{(1)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(s)\big)\big)^{\lambda} \\ = \;& 1 - \exp\big\{\lambda \ln\big(1 - \mathbf{P}\big(\widetilde{A}^{(1)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(s)\big)e^{-1+\widetilde{p}_{0,l}}(1+o(1))\big)\big\}. \end{aligned} \tag{77}$$

Подставим в последней цепочке $s = s_\Delta$ из леммы 4. Учитывая то, что $\mathbf{P}\big(\widetilde{A}^{(1)}_{\widetilde{p}_{0,l}}(s)\big) = \mathbf{P}(\eta_{0,l} \ge s)$, при выполнении условий леммы 5 в следствии 2 приводится соотношение (75), которое получается из оценки (74), если вычитаемое в ее правой части сходится к 0. Завершающее цепочку (77) выражение содержит аналогичную экспоненту, отличающуюся на ограниченный сомножитель в показателе степени. Поэтому соотношение (75) сохраняется при замене $\eta^*_{0,l}$ на $\mathcal{T}_{n,l}(k)$.

$$\mathbf{P}\big(\mathcal{T}_{n,l}(k) \ge \ln\lambda(\ln\ln\lambda + \ln\ln\ln\lambda + \ln\widetilde{p}_{0,l})\ln^{-2}\ln\lambda\big) \to 1. \tag{78}$$

События $l = l(n) \in \mathfrak{D}(\lambda) = [\lambda - \lambda^{\gamma}, \lambda + \lambda^{\gamma}]$ и $\mathcal{L}_l(\ell;k) \in \mathfrak{D}_p(\lambda)$ из условий теоремы имеют вероятности, сходящиеся к 1, и с вероятностями, сходящимися к 1, верны асимптотические оценки $l \sim \lambda$ и $k_{0,l} \sim p\lambda$, поэтому представление (78) влечет соотношение

$$\mathbf{P}\big(\mathcal{T}_n(k) \ge \ln\lambda\Delta_n(p,\lambda)\ln^{-2}\ln\lambda(1+o(1))\big) \to 1. \tag{79}$$

По определению среднего из асимптотического представления (79) следует оценка (29). Выделяя три зоны: $\ln p = o(\ln\ln\lambda)$, $\ln p \sim \ln\ln^{\beta}\lambda$, $\beta \in (0,1)$, и $\ln p - \ln\ln\lambda \sim \ln\ln^{\beta}\ln\lambda$, $\beta \in (0,1)$, из оценки (29) получаем неравенства (30).

□

3.4 Доказательство теоремы 7

Поясним первую часть условий теоремы. Это пересечение условий теоремы 9 и ограничений $l \in \mathfrak{D}(\lambda)$ и $k = o(n)$.

При не очень больших значениях $k = o(n)$ откажемся от аппроксимации гипергеометрического распределения биномиальным и нормальным. Воспользуемся прямым приближением (40) для вероятности того, что при выборе на отдельном шаге первого этапа цикла l позиций для мутации, не встречаются компоненты "0". Нам нужно, чтобы после первого этапа цикла в типе x', на l измененных позициях присутствовала хотя бы одна компонента "1". Данное событие противоположно тому, что у всех λ мутантов мутируют только компоненты "1". В самом деле, если в единичном эксперименте мутируют все позиции "1", то норма типа мутанта будет равна $|\mathrm{x}| - l$, а если присутствуют и "0", то норма типа мутанта будет больше, чем $|\mathrm{x}| - l$. Вероятность того, что в серии из λ экспериментов по итогам первого этапа цикла в типе x' на измененных позициях присутствует хотя бы одна компонента "1" при $l \in \mathfrak{D}(\lambda)$, равна

$$\begin{aligned} &1 - P^{\lambda}_{n,k}(l,0) = 1 - (1-k/n)^{l\lambda}\big(1 + o\big(l^2/n\big)\big)^{\lambda} = \\ = \;\; &1 - e^{\ln(1-k/n)l\lambda}(1+o(1)) = 1 - e^{-k\lambda^2(1+o(1))/n}(1+o(1)), \qquad (80) \end{aligned}$$

где мы учли то, что при $k > l$ верна оценка $k/n = o(1)$, а иначе — $l^2/n = o(1)$, а затем — $l^3/n = o(1)$ и разложение логарифма в окрестности 1.

Вероятность того, что на произвольном шаге второго этапа (скрещивании) будет изменена только одна позиция по теореме 11 (Пуассона) асимптотически равна e^{-1}, а вероятность того, что это будет "0" в типе x, не менее чем $1/l = (1+o(1))/\lambda$ при $l \in \mathfrak{D}(\lambda)$. Поэтому вероятность того, что на каждом шаге второго этапа в описанных условиях не выбрана позиция "0", будет равна

$$C(n,k,\lambda) := 1 - e^{-1}\lambda^{-1}(1+o(1))),$$

а учитывая бесконечную малость в этом выражении вычитаемого, по формуле Тейлора можно написать

$$\ln C(n,k,\lambda) = -e^{-1}\lambda^{-1}(1+o(1)).$$

Появление последнего события в λ независимых испытаниях будет равно $C^{\lambda}(n,k,\lambda)$. Вероятность положительного значения $|\mathrm{y}| - |\mathrm{x}|$ при условии замены в компонентах x единственной позиции и наличия на новых позициях в x' символа "1" будет не менее, чем

$$1-(1-(el)^{-1}(1+o(1)))^{\lambda} = 1-\exp\{-e^{-1}(1+o(1))\} = (1-e^{-e^{-1}})(1+o(1). \quad (81)$$

В итоге, из соотношений (80) и (81) следует, что на цикле $\mathcal{A}_{n,l}(k,\ell,\lambda)$ при $k=o(n)$ и $n\to\infty$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_{n,l}(k)>0)\ge\big(1-e^{-k\lambda^2(1+o(1))/n}(1+o(1))\big)\big(1-e^{-e^{-1}}\big)(1+o(1)). \quad (82)$$

Тождество (26), оценка (82) и условие $l\in\mathfrak{D}(\lambda)$, которое по центральной предельной теореме влечет $\mathbf{P}(\ell\in\mathfrak{D}(\lambda))=1+o(1)$, позволяют записать

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_{n}(k)>0)\ge\big(1-e^{-k\lambda^2(1+o(1))/n}(1+o(1))\big)\big(1-e^{-e^{-1}}\big)(1+o(1)). \quad (83)$$

Совпадение событий $\mathcal{T}_n(k)>0$ и $\tau_n(k)=1$ означают, что из оценки (83) следует (31). Из последней оценки и формулы (25) получаем неравенство (32). Оценки (33) являются частным случаем соотношения (32) с разбиением на зоны, основанные на различных асимптотических представлениях последовательностей $1-e^{-k\lambda^2(1+o(1))/n}(1+o(1))$ при стремлении показателя экспоненты к 0 или $-\infty$.

Докажем вторую часть теоремы, где уточняются асимптотические результаты из первой части при более жестких ограничениях $p\gg\lambda^{-1}\ln^3\lambda$.

Воспользуемся неравенством (77) при $s=1$.

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_{n,l}(k)\ge1)\ge1-\big(1-e^{-1}\widetilde{p}_{0,l}\big)^{\lambda}\approx1-\exp\big\{-e^{-1}\lambda\widetilde{p}_{0,l}\big\} \quad (84)$$

Здесь мы не используем теорем об аппроксимации гипергеометрического распределения биномиальным, а апеллируем только к теореме 5 и соотношению (40), которые применимы для $k\gg n\lambda^{-1}\ln^3\lambda$ или $p\gg\lambda^{-1}\ln^3\lambda$. С помощью аргументов, приведенных после соотношений (82) и (83) из (84) легко получить оценку (34).

§ 4. Доказательство теоремы 8

Разобъем область изменения значений $Z_{n,\mu(n),\lambda(n)}(s)=Z_n(s)$ на две части $\mathcal{D}_0=\{\kappa_0+1,\kappa_0+2,\dots,0.5n\}$ и $\mathcal{D}_1=\mathbb{N}_{\kappa_0}$, где $\kappa_0:=[en/(\ln\lambda\ln\ln\lambda)]$. Выбор κ_0 продиктован условием (61) с $\delta=1$, которое для упрощения явного вида κ_0 мы ослабили до $\ln\ln\lambda+\ln\ln\ln\lambda-c>1$ или $p>e/(\ln\lambda\ln\ln\lambda)$

По теореме 1 из соотношения (5) следует, что с вероятностью, сходящейся к 1, $Z_n(0)=n/2-0.5\sqrt{2n\ln\mu}(1+o(1))$. Если учесть, что зона $\mathcal{D}_0$ содержит $0.5n(1+o(1))$ целых значений и средние значения приращений $\mathcal{T}_n(k)=Z_n(s)-Z_n(s+1)$ на цикле $\mathcal{A}_n(k,\ell,\lambda)$ по формуле (30) из теоремы 6 в зоне $\mathcal{D}_0$ оцениваются сверху величиной $\ln\lambda/\ln\ln\lambda$, то значения последовательности $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ покидают эту зону в среднем не более чем за $\mathcal{B}_0$ шагов, где

$$\mathcal{B}_0:=0.5n\ln\ln\lambda/\ln\lambda(1+o(1)). \quad (85)$$

В зоне $\mathcal{D}_1$ мы игнорируем превосходящую 1 величину приращений $Z_n(s+1) - Z_n(s)$ и применяем теорему 7. Разобъем зону $\mathcal{D}_1$ на 3 части

$$\mathcal{D}_{1,3} = \mathbb{N}_{\kappa_2}, \quad \mathcal{D}_{1,2} = \mathbb{N}_{\kappa_1} \setminus \mathbb{N}_{\kappa_2}, \quad \mathcal{D}_{1,1} = \mathbb{N}_{\kappa_0} \setminus \mathbb{N}_{\kappa_1},$$

где $\kappa_1 := [n \ln\ln\lambda/\lambda^2]$ и $\kappa_2 := [0.5n/\lambda^2]$.

Из соотношений (33) следует, что при $k \in \mathcal{D}_{1,1}$ верно неравенство

$$\mathbf{E}[\tau_n(k)] \leq \frac{1+o(1)}{\left(1-e^{-e^{-1}}\right)(1-e^{-0.5})},$$

а учитывая то, что мощность $|\mathcal{D}_{1,1}| \leq en/(\ln\lambda \ln\ln\lambda)$, количество шагов до покидания нашим Марковским процессом зоны $\mathcal{D}_{1,1}$ в среднем не превосходит

$$\mathcal{B}_{1,1} := \frac{en}{\ln\lambda\ln\ln\lambda\left(1-e^{-e^{-1}}\right)(1-e^{-0.5})}(1+o(1)) = o(\mathcal{B}_0). \tag{86}$$

Хорошо известна формула Эйлера для асимптотики суммы первых n членов гармонического ряда

$$H_n := \sum\nolimits_{k=1}^{n} k^{-1} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n, \tag{87}$$

где $\gamma = 0,5772\ldots$ — постоянная Эйлера — Маскерони, а $\varepsilon_n = o(1)$.

Формула Эйлера (87) позволяет получить

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{k\in\mathcal{D}_{1,2}} k^{-1} = \ln\kappa_1 - \ln\kappa_2 + o(1) \sim \ln\ln\ln\lambda, \\ &\sum\nolimits_{k\in\mathcal{D}_{1,3}} k^{-1} \sim \ln\kappa_2 \approx \ln n - 2\ln\lambda. \end{aligned} \tag{88}$$

В зонах $\mathcal{D}_{1,2}$ и $\mathcal{D}_{1,3}$ соотношения (33) влекут

$$\mathbf{E}[\tau_n(k)] \leq \frac{2n(1+o(1))}{\left(1-e^{-e^{-1}}\right)k\lambda^2}, \quad \mathbf{E}[\tau_n(k)] \leq \frac{n(1+o(1))}{\left(1-e^{-e^{-1}}\right)k\lambda^2},$$

соответственно, а количество шагов до покидания нашим Марковским процессом зон $\mathcal{D}_{1,2}$ и $\mathcal{D}_{1,1}$ с учетом оценок (88) в среднем не превосходит

$$\mathcal{B}_{1,2} := \sum_{k\in\mathcal{D}_{1,2}} \frac{2n(1+o(1))}{\left(1-e^{-e^{-1}}\right)k\lambda^2} = \frac{2n\ln\ln\ln\lambda(1+o(1))}{\left(1-e^{-e^{-1}}\right)\lambda^2} = o(\mathcal{B}_0). \tag{89}$$

$$\mathcal{B}_{1,1} := \sum_{k\in\mathcal{D}_{1,2}} \frac{n(1+o(1))}{\left(1-e^{-e^{-1}}\right)k\lambda^2} = \frac{n(\ln n - 2\ln\lambda)(1+o(1))}{\left(1-e^{-e^{-1}}\right)\lambda^2}. \tag{90}$$

Из оценок (85), (86), (89) и (90) получаем представление (35).

Оба выражения в правой части (35) убывают с ростом $\lambda(n)$, поэтому при $\lambda(n) \sim n^\gamma L(n)$, где $\gamma \in (0, 1/3)$ и $L(n)$ медленно меняющаяся на бесконечности функция, верно неравенство (36).

Найдем последовательность $\lambda = \lambda(n)$, минимизирующую $\lambda(n)\mathbf{E}[\tau_n]$ по $\lambda(n)$. После умножения на $\lambda(n)$ в правой части представления (35) первое слагаемое возрастает, а второе убывает по $\lambda(n)$.

Значение $\lambda(n)$, где главные члены слагаемых в (35) после умножения на $\lambda(n)$ асимптотически эквивалентны, удовлетворяет соотношению

$$\lambda^2(n)\big(1 - e^{-e^{-1}}\big) \ln\ln\lambda(n) \sim 2(\ln n - 2\ln\lambda(n))\ln\lambda(n),$$

из которого следует $\ln\lambda(n) \sim 0.5\ln\ln n$. Это позволяет записать представление

$$\lambda^2(n)\big(1 - e^{-e^{-1}}\big) \ln\ln\ln n \sim \ln n \ln\ln n.$$

Последнее соотношение влечет асимптотическое представление (37) и так как первое слагаемое в правой части (35) эквивалентно второму, из этих оценок следует неравенство (38).

Докажем, что минимум функции $\lambda(n)\mathbf{E}[\tau_n]$ достигается при $\lambda(n)$ асимптотически совпадает с точкой $\lambda_0 := \lambda(n)$, где $\lambda(n)$ определена соотношением (37). Пусть $\lambda_1 = \lambda_0(1 \pm \delta)$, где $\delta \in (0, 0.5)$ фиксировано, тогда

$$0.5n\lambda_1 \ln\ln\lambda_1/\ln\lambda_1 \sim 0.5n\lambda_0(1 \pm \delta)\ln\ln\ln n/\ln\ln n,$$
$$n(\ln n - 2\ln\lambda_1)\big(1 - e^{-e^{-1}}\big)^{-1}\lambda_1^{-1} \sim n\ln n\big(1 - e^{-e^{-1}}\big)^{-1}\lambda_0^{-1}(1 \pm \delta)^{-1}.$$

Поэтому по определению λ_0 получаем соотношение

$$\mathcal{E}_n(\lambda_1) \approx 0.5\mathcal{E}_n(\lambda_0)((1 \pm \delta) + (1 \pm \delta)^{-1}) = \big(1 + (1 \pm \delta + \delta^2)(1 \pm \delta)^{-1}\big)\mathcal{E}_n(\lambda_0),$$

которое доказывает асимптотическую минимальность функции $\mathcal{E}_n(\lambda(n))$ при $\lambda_0 = \lambda(n)$.

§ 5. Приложения к генетическим алгоритмам

Остановимся на взаимосвязи изучаемых нами цепей Маркова с генетическими алгоритмами. Авторы [14], [15] и ряда других работ разработали генетический алгоритм $(1 + (\lambda, \lambda))$ GA с новым оператором скрещивания, устраняющим “неудачные” мутации. В работе [15] с *onemax* функцией приспособленности и $\mu(n) \equiv 1$ приведены наилучшие оценки по $\mathbf{E}[\mathbb{T}_n]$ — среднему числу для количества вычислений функции приспособленности до перехода в поглощающее состояние. Как следует из доказательства теоремы 5 (см. соотношение (48)), при значениях $Z_n(s)$, отделенных от нуля некоторой растущей последовательностью и не превосходящих величины порядка $0.5n$ первый этап цикла — мутация с большой вероятностью приводит к уменьшению нормы типа x′, а второй этап цикла — скрещивания с достаточно большой вероятностью приводит к типу y, превосходящему x по норме. Это означает, что $Z_n(s+1) < Z_n(s)$. Основная масса работ по генетическим алгоритмам для аналогичных моделей опирается на ряд комбинаторных соображений, прямые вычисления для биномиального распределения и неравенства Чернова — Хёфдинга или ряд аналогов неравенства Маркова (Чебышева) (см. [13]). Их оценки дают приближения с точностью до мультипликативной постоянной. В данной работе предложен подход, основанный на использовании классических предельных теорем теории вероятностей в схеме серий, включая неравномерную по пространству аппроксимацию сумм независимых случайных величин нормальным распределением. Наши оценки, в основном, асимптотически точные при неограниченном росте параметров.

Современный аппарат предельных теорем теории вероятностей позволяет с очень высокой точностью описывать асимптотические свойства вероятностей перехода цепи Маркова $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ за один шаг в зависимости от значения $Z_n(s)$. Это открывает новые возможности для исследования неоднородных по поколениям генетических алгоритмов.

Мы не будем описывать генетический алгоритм $(1+(\lambda,\lambda))$ GA из [15]. Он эквивалентен ДМСП цепям Маркова. Количество вычислений функции приспособленности до попадания в поглощающее состояние в генетическом алгоритме совпадает с количеством вычислений нормы частиц в порождающих цепь Маркова случайных процессах.

Приведем основанное на полученных результатах доказательство аналога наилучшего в настоящее время результата для $\mathbf{E}[\mathbb{T}_n]$ из [15]. Отличительной особенностью нашего результата являются явные значения постоянных в оценках вместо $O(\cdot)$.

Теорема 12. *Если* $\{Z_n(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0} = \{Z_{n,\mu(n),\lambda(n)}(s)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ *— ДМСП цепь Маркова,* $\mu = \mu(n) = O(n\ln^2 n)$, $\lambda(n) = o\big(n^{1/3}\big)$ *и* $\lambda(n)\to\infty$, *тогда количество вычислений функции приспособленности до попадания цепи Маркова в поглощающее состояние оценивается сверху величиной*

$$\mathbf{E}[\mathbb{T}_n] \le \mu(n) + n\lambda(n)\frac{\ln\ln\lambda(n)}{\ln\lambda(n)}(1+o(1)) + \frac{2n(\ln n - 2\ln\lambda(n))(1+o(1))}{\big(1-e^{-e^{-1}}\big)\lambda(n)}. \quad (91)$$

Для последовательности $\lambda(n)$, определенной соотношением (37), оценка (91) имеет асимптотически минимальную правую часть и принимает вид

$$\mathbf{E}[\mathbb{T}_n] \le \mu(n) + 2n\sqrt{\ln n\ln\ln\ln n\big(1-e^{-e^{-1}}\big)^{-1}\ln^{-1}\ln n}(1+o(1)). \quad (92)$$

Доказательство. Очевидна взаимосвязь момента попадания цепи в поглощающее состояние τ_n с количеством вычислений целевой функции:

$$\mathbb{T}_n = \mu(n) + 2\lambda(n)\tau_n.$$

Поэтому утверждение данной теоремы немедленно следует из теоремы 8.

При вычислении минимума $\mathbf{E}[\mathbb{T}_n]$ мы исключили случай $\lambda(n) \sim n^\gamma L(n)$, где $\gamma \in (0.1/3)$, из теоремы 8, так как в этом случае среднее количество вычислений функции приспособленности до попадания цепи Маркова в поглощающее состояние будет иметь порядок $n^{1+\gamma}$. □

Проведем простейший анализ целесообразности использования значений $\mu(n) \to \infty$ для уменьшения количества вычислений целевой функции. Очевидно, что при $\mu(n)$ бесконечно малых относительно суммы остальных слагаемых из правой части оценки (91) или второго слагаемого в (92), имеющего вид $\mu(n) = o\big(n\sqrt{\ln n \ln\ln\ln n / \ln\ln n}\big)$, асимптотически не уменьшают $\mathbf{E}[\mathbb{T}_n]$. Более того, в остальных случаях значение $\mathbf{E}[\mathbb{T}_n]$ может увеличиваться. Однако, возможно локальное уменьшение количества вычислений функции приспособленности. Если $\mu(n) \to \infty$, по теореме 1 верно соотношение $0.5n - Z_{n,\mu(n),\lambda(n)}(0) \sim 0.5\sqrt{2n \ln \mu(n)}$, а в случае $\mu(n) = 1$ по центральной предельной теореме $0.5n - Z_{n,1,\lambda(n)}(0) = o\big(\sqrt{n \ln \mu(n)}\big)$.

Выберем s_0 такое, что $0.5n - Z_{n,1,\lambda(n)}(s_0) \sim 0.5\sqrt{2n \ln \mu(n)}$, тогда по теореме 8 верно неравенство $s_0 \le 0.5\sqrt{2n \ln \mu(n)} \ln\ln \lambda(n)/\ln \lambda(n)$. Количество вычислений функции приспособленности до попадания значений цепи Маркова в $Z_{n,1,\lambda(n)}(s_0)$ с вероятностью, сходящейся к 1, оценивается сверху величиной

$$T_{n,\lambda(n)}(\mu(n), s_0) := 0.5\lambda(n)\sqrt{2n \ln \mu(n)} \ln\ln \lambda(n)/\ln \lambda(n).$$

Количества вычислений функции приспособленности для $Z_{n,\mu(n),\lambda(n)}(0)$ равно $\mu(n)$ и может быть меньше относительно аналога для $Z_{n,1,\lambda(n)}(s_0)$ только в случае $\mu(n) \le T_{n,\lambda(n)}(\mu(n), s_0)(1 + o(1))$. Это неравенство влечет $\ln \mu(n) \le 0.5 \ln n$, в силу того, что $\mu(n) = O(n \ln^2 n)$, может быть записано в общем случае в виде

$$\mu(n) \le 0.5\lambda(n)\sqrt{2n \ln n} \ln\ln \lambda(n)/\ln \lambda(n).$$

В случае экстремального значения $\mathbf{E}[\mathbb{T}_n]$, достижимого при условии $\lambda(n) \sim \sqrt{\ln n \ln\ln n \big(1 - e^{-e^{-1}}\big)^{-1} / \ln\ln\ln n}$ (см. (37)), из последнего соотношения получаем оценку

$$\mu(n) \le \sqrt{0.25 n \ln^2 n \ln\ln\ln n \big(1 - e^{-e^{-1}}\big)^{-1} \ln^{-1}\ln n}(1 + o(1)).$$

Список литературы

1. *Lamperti J.* Maximal Branching Processes and Long-Range Percolation *J. Appl. Probab.* 1970. V. 7, N 1. P. 89–96.

2. *Ватутин В. А., Зубков А. М.* Ветвящиеся процессы. I //*Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.* /Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 23. С. 3–67.

3. *Vatutin V. A. and Zubkov A. M.* Branching processes. II //*J. Soviet Math.* 1997. V. 67, N 6. P. 3407–3485.

4. *Erdös P. and Rényi A.* On two problems of information theory //*Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 1963. Ser. A, N 8. P. 229–243.

5. *Линдгрен Г., Лидбеттер М., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов.* М: Мир, 1989.

6. *Боровков А. А. Теория вероятностей.* 3-е изд. М.: Эдиториал УРСС и Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН, 1999.

7. *Петров В. В. Суммы независимых случайных величин.* М.: Наука 1972.

8. *Тюрин И. С.* Уточнение остаточного члена в теореме Ляпунова //*Теория вероятн. и ее примен.* 2011, Т. 56, В. 4. С. 808–811.

9. *Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* М: Мир, 1967. Т. II.

10. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* М: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1949.

11. *Pinelis I.* Monotonicity properties of the Poisson approximation to the binomial distribution //*Statistics and Probability Letters* 2020. V. 167, N 108901.

12. *Лебедев А. В.* Предельные теоремы о максимумах пуассоновских последовательностей и их применения в теории массового обслуживания //*Теория вероятн. и ее примен.* 1999, Т. 44, В. 2. С. 446–450.

13. *Doerr B.* Probabilistic Tools for the Analysis of Randomized Optimization Heuristics // *Theory of Evolutionary Computation, Recent Developments in Discrete Optimization* / Natural Computing Series / Eds. B. Doerr and F. Neumann, Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. P. 1–87.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 113-151
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 113-151

14. *Doerr B., Doerr C. and Ebel F.* From black-box complexity to designing new genetic algorithms //*Theoretical Computer Science* 2015. V. 567. P. 87–104.

15. *Doerr B. and Doerr C.* Optimal Static and Self-Adjusting Parameter Choices for the $(1+(\lambda,\lambda))$ Genetic Algorithm //*Algorithmica* 2018. V. 80. P. 1658–1709.

References

1. *Lamperti J.* Maximal Branching Processes and Long-Range Percolation *J. Appl. Probab.* 1970. V. 7, N 1. P. 89–96.

2. *Vatutin V. A. and Zubkov A. M.* Branching processes. I //*J. Soviet Math.* 1987. V. 39, N 1. P. 2431–2475.

3. *Vatutin V. A. and Zubkov A. M.* Branching processes. II //*J. Soviet Math.* 1997. V. 67, N 6. P. 3407–3485.

4. *Erdös P. and Rényi A.* On two problems of information theory //*Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 1963. Ser. A, N 8. P. 229–243.

5. *Leadbetter M. R., Lindgren G. and Rootzén H.* *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes.* Berlin: Springer, 1983.

6. *Borovkov A. A.Probability theory.* Universitext, London: Springer, 2013.

7. *Petrov V. V.* *Sums of independent random variables.* Berlin: Springer, 1975.

8. *Tyurin I. S.C.* A Refinement of the Remainder in the Lyapunov Theorem //*Theory Probab. Appl.* 2011. V. 56, N 4. I. 693–696.

9. *Feller W.* *An introduction to probability theory and its applications.* New York: Wiley, 1966. V. II.

10. *Gnedenko B. V. and Kolmogorov A.N.* *Limit Distributions For Sums Of Independent Random Variables.* London: Addison-Wesley publishing company. 1954.

11. *Pinelis I.* Monotonicity properties of the Poisson approximation to the binomial distribution //*Statistics and Probability Letters* 2020. V. 167, N 108901.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 113-151
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 113-151

12. *Lebedev A. V.* Limit Theorems on Maximums of Poisson Sequences and Their Applications to Queuing Theory //*Theory of Probability and its Applications* 2000. V. 44, I. 2. P. 400–404.

13. *Doerr B.* Probabilistic Tools for the Analysis of Randomized Optimization Heuristics // *Theory of Evolutionary Computation, Recent Developments in Discrete Optimization* / Natural Computing Series / Eds. B. Doerr and F. Neumann, Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. P. 1–87.

14. *Doerr B., Doerr C. and Ebel F.* From black-box complexity to designing new genetic algorithms //*Theoretical Computer Science* 2015. V. 567. P. 87–104.

15. *Doerr B. and Doerr C.* Optimal Static and Self-Adjusting Parameter Choices for the $(1+(\lambda,\lambda))$ Genetic Algorithm //*Algorithmica* 2018. V. 80. P. 1658–1709.

Информация об авторе

Валентин Алексеевич Топчий, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник
SPIN 3136-3967 AuthorID: 16043
Scopus Author ID 55756650200

Author Information

Valentin A. Topchii, Doctor of Mathematics, Professor, Senior Researcher
SPIN 3136-3967 AuthorID: 16043
Scopus Author ID 55756650200

Статья поступила в редакцию 05.12.2025;
одобрена после рецензирования 10.04.2025; принята к публикации 06.05.2026

The article was submitted 05.12.2025;
approved after reviewing 10.04.2025; accepted for publication 06.05.2026